JEAN-NOËL VON DER WEID

FORMULES DE MATHS

Toutes les formules de base groupées par ordre logique et expliquées

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i \in I} x_i$$

MARABOUT

MARABOUT ***SAVOIRS***

Afin de vous informer de toutes ses publications, **marabout** édite des catalogues régulièrement mis à jour. Vous pouvez les obtenir gracieusement auprès de votre libraire habituel.

Collection dirigée par Pierre Vallaud

© 1989 Marabout, Alleur Belgique

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou microfilm est interdite sans autorisation écrite de l'éditeur.

Jean-Noël von der Weid

Formules de maths

MARABOUT

ESPACE

■

Droite dans l'espace

Considérons la caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace :

Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathcal{E}$ est déterminée par un de ses repères $(M_0, \vec{u})$: l'égalité $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$, où t est un réel, caractérise l'appartenance d'un point M de $\mathcal{E}$ à la droite $\mathcal{D}$.

Soit un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et désignons par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0, par (α, β, γ) celles de $\vec{u}$ et par (x, y, z) celles d'un point M de l'espace.

L'égalité ci-dessus peut se traduire dans le repère $\mathcal{R}$ par le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$$

appelé système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

Plan dans l'espace

Considérons un plan défini par un point et un vecteur normal.

On nomme vecteur normal d'un plan $\mathcal{P}$, tout vecteur $\vec{u}$, *non nul*, dont la direction est orthogonale à celle de $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est déterminé par un de ses points, M_0, et par un de ses vecteurs normaux $\vec{u}$: $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{u}$ et M_0M soient orthogonaux, à savoir tels que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M}$ soit nul.

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ caractérise l'appartenance d'un point M de l'espace au plan $\mathcal{P}$.

TRADUCTION DANS UN REPERE ORTHONORMAL

Soit un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0, par (a, b, c) celles de $\vec{u}$ et par (x, y, z) celles d'un point M de l'espace.

L'égalité $\vec{u} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$ s'écrit alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Cette relation, vérifiée par les coordonnées (x, y, z) d'un point M de l'espace si, et seulement si, ce point fait partie de $\mathcal{P}$, se trouve être une *équation cartésienne de* $\mathcal{P}$.

Théorème

Dans un repère orthonormal de l'espace, une équation cartésienne du plan défini par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur normal $\vec{u}(a, b, c)$ est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Nous pouvons alors formuler cette équation de la façon suivante :

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0,$$

soit, en posant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

L'un au moins des trois réels a, b, c, n'est pas nul, puisque le vecteur normal de coordonnées (a, b, c) n'est pas nul.

Ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$

On donne trois réels a, b, c non tous nuls et un réel d. Voyons maintenant l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de l'espace $\mathcal{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormal de $\mathcal{E}$ vérifient l'équation :

$$ax+by+cz+d = 0 \quad (1)$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas vide : si a n'est pas nul, le point de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ appartient à $\mathcal{F}$.

Soit $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{F}$; on a : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

L'équation (1) est alors équivalente à :
$(ax + by + cz + d) - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$,
soit :
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$ (2)

Or (2) est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par le point $M\ (x_0, y_0, z_0)$ et le vecteur normal $\vec{u}\ (a, b, c)$.

Donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}$.

Théorème

Trois réels a, b, c non tous nuls et un réel d étant donnés, l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées (x, y, z), dans un repère orthonormal, vérifient l'équation
$ax + by + cz = 0$
est un plan.
Le vecteur de coordonnées (a, b, c) est un vecteur normal de ce plan.

Transformations de l'espace

Ensemble des homothéties-translations

Désignons respectivement par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des homothéties et l'ensemble des translations de l'espace $\mathcal{E}$.

La réunion $\mathcal{H} \cup \mathcal{F}$ est appelée ensemble des homothéties-translations de l'espace $\mathcal{E}$. Les éléments de cet ensemble sont les homothéties-translations.

Soit f une homothétie-translation.
Soit un bipoint (M, N) d'image $(M'N')$.

Si f est une translation de vecteur $\vec{u}$, on a :
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{u}$,

d'où :
$\overrightarrow{M'N'} = 1\,\overrightarrow{MN}$.

Si f est une homothétie de centre O et de rapport k, on a :
$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ et
$\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$,

d'où
$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right)$,
soit :
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Le résultat en est que toute homothétie-translation a la propriété suivante :

Il existe un réel k, non nul, tel que pour tout bipoint (M,N) d'image (M', N') :
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Pour qu'une application f de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même soit une homothétie-translation, il faut et il suffit qu'il existe un réel k non nul tel que, pour tout bipoint (M,N) d'image (M', N') :
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Etudions l'application composée de deux homothéties-translations.

Soit f_1 et f_2 deux homothéties-translations. Il existe deux réels non nuls k_1 et k_2 tels que, si (M, N) est un bipoint quelconque, (M_1, N_1) son image par f_1, et (M', N') l'image de (M_1, N_1) par f_2, on a :
$\overrightarrow{M_1N_1} = k_1\overrightarrow{MN}$ et
$\overrightarrow{M'N'} = k_2\overrightarrow{M_1N_1}$,
d'où :
$\overrightarrow{M'N'} = k_2k_1\overrightarrow{MN}$.
Le réel k_2k_1, produit de deux réels non nuls, est non nul. Par ailleurs, le bipoint (M', N') est l'image de (M, N) par l'application composée $f_2 \circ f_1$. Donc, $f_2 \circ f_1$ est une homothétie-translation.

L'application composée de deux homothéties-translations est une homothétie-translation.

Soit la bijection réciproque d'une homothétie-translation.

Soit f une homothétie-translation.
- Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$, f est bijective et sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Si f est l'homothétie de centre O et de rapport k, f est bijective et sa bijection réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.
Par suite :
toute homothétie-translation f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1} est une homothétie-translation.

On sait qu'il existe un réel k non nul tel que, pour tout bipoint (M, N) d'image (M', N') par f :
$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.
En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par le réel k, on obtient :
$\alpha_1\overrightarrow{G'A'_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{G'A'_n} = \vec{0}$,
ce qui montre que G' est le barycentre du système $(A'_i, \alpha_i)_{i \in \mathbf{N}_n}$.

Conservation des barycentres

Considérons le barycentre G d'un système de n points qui sont pondérés (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) dont la masse $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n$ n'est pas nulle :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (1)$$

Désignons par G'' l'image de G par une homothétie-translation f et par A'_i l'image de chaque point A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

L'image par une homothétie-translation du barycentre de n points pondérés est le barycentre des images de ces points affectés des mêmes coefficients.
On peut également représenter cette propriété en disant qu'une homothétie-translation conserve les barycentres. Ainsi, une homothétie-translation conserve les milieux des segments, donc l'équipollence des bipoints.

Image d'un plan

Soit trois points non alignés A, B, C et, pour tout couple (t_1, t_2) de réels, le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}.$$

Les points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $M' = f(M)$ vérifient la relation :

$$\overrightarrow{A'M'} = t_1\overrightarrow{A'B'} + t_2\overrightarrow{A'C'}.$$

En outre, A', B', C' ne sont pas alignés : s'ils l'étaient, on aurait $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{A'B'}$, d'où $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, et A, B, C seraient eux aussi alignés.

Il faut remarquer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et qu'il en va de même de (AC) et $(A'C')$. D'où le plan $(A'B'C')$ qui est parallèle au plan (ABC). (Deux plans sont parallèles si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de l'un parallèles à l'autre.)

Isométries dans l'espace

On nomme isométrie de l'espace $\mathcal{E}$ toute transformation de $\mathcal{E}$ (bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$) conservant les distances. C'est-à-dire transformant deux points quelconques M et N en deux points M' et N' tels que $MN = M'N'$.

Pour ce qui est des isométries de l'espace, on démontre les propriétés suivantes :

- La bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie.

- L'application composée de deux isométries est une isométrie.

- Toute isométrie conserve les produits scalaires : trois points quelconques A, B, C et leurs images respectives A', B'', C'' sont tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B''} \cdot \overrightarrow{A'C''}$.

- Si trois points A, B, C sont tels que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, leurs images respectives A', B'', C'' par une isométrie sont telles que $\overrightarrow{A'C''} = t\overrightarrow{A'B''}$.

- Toute isométrie conserve les barycentres.

- L'image d'une droite, d'une demi-droite ou d'un segment par une isométrie est une droite, une demi-droite ou un segment.

Rotations dans l'espace

Considérons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux demi-plans limités par une même droite Δ et soit $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de Δ.

La droite Δ orientée par le vecteur $\vec{k}$ est un axe noté $\Delta_{\vec{k}}$.

Le triplet $(\mathcal{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathcal{P}')$ est un angle orienté de demi-plans. Les deux demi-plans sont les faces de l'angle et l'axe $\Delta_{\vec{k}}$ son arête.

Tout plan Π orthogonal à l'arête $\Delta_{\vec{k}}$ est orienté par le vecteur $\vec{k}$.

Le plan Π coupe Δ en O et les faces suivant deux demi-droites Ox et Ox' d'origine O.

Nous admettrons que les mesures de l'angle de demi-droites $(\widehat{Ox, Oy})$ dans le plan orienté Π restent invariantes quand Π varie en restant orthogonal à Δ.

Retenons que les mesures d'un angle de demi-plans $(\mathcal{P}, \Delta_{\vec{k}}, \mathcal{P}')$ sont les mesures de l'angle de demi-droites déterminé par l'un, quelconque, des plans Π orthogonaux à Δ, orienté par le vecteur $\vec{k}$.

Produit de deux réflexions

Considérons l'application composée $r = s_{\mathcal{P}''} \circ s_{\mathcal{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ passant par une même droite Δ.

Un vecteur unitaire $\vec{k}$ de Δ étant choisi, désignons par α une mesure de l'angle $(\mathcal{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathcal{P}'_1)$ où $\mathcal{P}_1$ est un des demi-plans de $\mathcal{P}$ limité par Δ et $\mathcal{P}'_1$ un des demi-plans de $\mathcal{P}'$ limité par Δ.

- Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, r est l'application Id_g.

- Admettons maintenant $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$.
Tout point de la droite Δ est invariant par $s_{\mathcal{P}}$ et par $s_{\mathcal{P}''}$ et donc par r.

Soit M un point n'appartenant pas à Δ. Le plan Π passant par M et orthogonal à Δ coupe Δ en O; il coupe respectivement les demi-plans suivant deux demi-droites Ox et Ox' dont l'origine est O.

Le point M_1, symétrique orthogonal de M par rapport à Ox, est le symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathcal{P}$. De même le point M', symétrique orthogonal de M_1 par rapport à Ox', est le symétrique orthogonal de M_1 par rapport à $\mathcal{P}'$.

Or, dans le plan Π orienté par le vecteur $\vec{k}$, on a : $(Ox, Ox') = \alpha \quad (2\pi)$.

Il en résulte que le point $M' = r(M)$ est, au sein de ce plan, l'image de M par la rotation de centre O et d'angle 2α.

La *restriction* de r au plan Π est par conséquent la rotation de centre O et d'angle 2α.

Définition

On appelle rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ, l'application de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même dont la restriction à tout plan Π, orthogonal à Δ en O et orienté par le vecteur $\vec{k}$, est la rotation de centre O et d'angle θ.

Nous pouvons énoncer, après avoir étudié le prduit de deux réflexions, qui a conduit à la définition des rotations de l'espace :

Théorème

L'application composée $r = s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ de deux réflexions par rapport à deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ passant par une même droite Δ est une rotation de l'espace. Plus précisément, $\mathcal{P}_1$ étant un des deux demi-plans de $\mathcal{P}$ limité par Δ et $\mathcal{P}'_1$ un des deux demi-plans de $\mathcal{P}'$ limité par Δ, si $(\mathcal{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathcal{P}'_1) = \alpha \ (2\pi)$, r est la rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle 2α.

Théorème

Toute rotation r d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ peut se décomposer sous la forme $r = s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$, où $s_{\mathcal{P}}$ et $s_{\mathcal{P}'}$ sont les réflexions par rapport aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ contenant à chacun deux demi-plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}'_1$, limités par $\Delta_{\vec{k}}$ et tels que $\left(\mathcal{P}_1, \Delta_{\vec{k}}, \mathcal{P}'_1\right) = \frac{\theta}{2} \ (2\pi)$.

Nous pourrons maintenant retenir que :

Toute rotation d'axe $\Delta_{\vec{k}}$ et d'angle θ non nul est une isométrie dont l'ensemble des points fixes est la droite Δ.

Toute isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est une droite $\mathcal{D}$ est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle non nul.

Une application vérifiant l'une ou l'autre de ces conditions ($f \circ f = \mathrm{Id}_E$; f est bijective et puis $f^{-1} = f$) est dite involutive.

Toute isométrie involutive possède au moins un point invariant.
Si nous considérons l'ensemble des isométries involutives de l'espace $\mathcal{E}$, nous verrons que celui-là est formé :

- de l'application identique de $\mathcal{E}$;

- des réflexions ;

-des symétries orthogonales par rapport à une droite, ou demi-tours ;

- des symétries centrales.

FONCTIONS

Polynômes

Les fonctions polynômes sont les plus simples parmi les fonctions numériques. C'est aux fonctions polynômes, et essentiellement aux fonctions polynômes de faible degré, que l'on compare une fonction à étudier. Ainsi, la comparaison locale d'une fonction à des fonctions polynômes avec degré 1 nous conduit à la notion de tangente en un point à sa courbe représentative.

- Si un polynôme réduit $P(x)$ n'est pas nul, son degré est l'exposant de celui de ses monômes qui a le plus grand degré.
Si $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes non nuls alors :

$$d°(A + B) \leq \sup(d°A, d°B)$$
et
$$d°(AB) = d°A + d°B.$$

- Un polynôme $A(x)$ est divisible par le polynôme $B(x)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $A(x) = B(x)Q(x)$.
On dit aussi que $A(x)$ est factorisable par $B(x)$.
Un polynôme $A(x)$ est factorisable par $x - a$ si, et seulement si, a est racine de $A(x)$ (à savoir $A(a) = 0$).
Il existe alors un polynôme $Q(x)$, et un seul, tel que : $A(x) = (x - a)Q(x)$.

- Pour factoriser un polynôme, il sera bien sûr toujours possible de recourir aux méthodes élémentaires: se servir d'un facteur commun; utiliser des développements qui sont remarquables; rechercher des facteurs communs grâce à des factorisations partielles; ajouter ou retrancher un terme identique pour faire apparaître un développement remarquable, etc.
- Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n + 1$ racines distinctes constitue le polynôme nul.

Etant donné des polynômes $A(x)$ et $B(x)$, $B(x)$ étant différent du polynôme nul, il existe un couple $(Q(x), R(x))$ de polynômes, et un seul, tel que :

$$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)$$

et

$$d^\circ R < d^\circ B.$$

Pour les déterminer, on peut se servir d'une méthode de coefficients indéterminés.

- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, les coefficients de leurs monômes de même degré sont respectivement égaux.

- Une fonction rationnelle est un quotient de fonctions polynômes. Pour calculer avec les fonctions rationnelles, il est nécessaire de bien savoir calculer avec les polynômes.

Fonctions circulaires

Parmi toutes les fonctions numériques, les fonctions périodiques ont une importance spéciale dans l'étude de certains phénomènes, notamment physiques. Les fonctions trigonométriques constituent des fonctions périodiques simples qui peuvent être employées comme références pour l'étude d'autres fonctions périodiques.

La fonction tangente est définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(si $\cos x \neq 0$).

Suites arithmétiques

Certaines suites possèdent la propriété de présenter un accroissement constant entre deux termes consécutifs. Ces suites correspondent à un cas particulièrement simple de l'étude du sens de variation d'une suite.

En effet, comme la différence $u_{n+1} - u_n$, est constante, elle est nécessairement de signe constant.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq a}$ est une suite arithmétique si, et seulement si, la différence de deux termes consécutifs quelconques est égale à un nombre constant r, que l'on nomme la *raison* de la suite arithmétique.

Les suites arithmétiques présentent un exemple très simple de passage d'une définition par une formule de récurrence à une définition par une formule explicite. En effet :

$u_{a+1} = u_a + r,$

$u_{a+2} = u_{a+1} + r = u_a + 2r,$ etc.

Si $u_{a+p} = u_a + pr,$
alors
$u_{a+p+1} = (u_a + p_r) + r = u_a + (p + 1)\, r.$

Nous admettrons qu'il en résulte la formule :
$u_{a+p} = u_a + pr.$

Si $a + p = n,$
alors
$u_n = u_a + (n - a)\, r.$

Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq a}$ une suite arithmétique de premier terme u_a et de raison r.
Pour tout entier n supérieur ou égal à a, on a
$u_n = u_a + (n - a)\, r.$

Etant donné la grande simplicité de $u_{n+1} - u_n$, dans le cas d'une suite arithmétique, on est en mesure de conclure :

Théorème

Une suite arithmétique de raison r est :
- croissante si, et seulement si, r est positif ;
- décroissante si, et seulement si, r est négatif ;
- constante si, et seulement si, r est nul.

Il se peut que l'on doive envisager la *somme des premiers termes* d'une suite arithmétique. Ainsi a-t-on souvent besoin de la somme des n premiers entiers naturels non nuls. On peut se trouver face à cette situation dans des exercices de détermination de mesures approchées de certaines aires, par exemple.

Théorème

Des réels a, b, c, pris dans cet ordre, sont des *termes consécutifs* d'une suite arithmétique si, et seulement si, b est la moyenne arithmétique de a et c (à savoir $2b = a + c$).

Suites géométriques

Certaines suites géométriques ont la propriété de présenter un rapport constant entre deux termes consécutifs.

Ainsi l'on trouve des suites telles que le pourcentage de variation entre deux termes consécutifs est constant.

Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq a}$ est une suite géométrique si, et seulement si, tout terme (a l'exception du premier) est obtenu à partir du précédent en multipliant celui-ci par un nombre constant q, que l'on appelle la *raison* de la suite géométrique.

Les suites géométriques sont des exemples très simples de passage d'une définition par une formule de récurrence à une définition par une formule explicite. On a en effet :

$u_{a+1} = qu_a$;
$u_{a+2} = qu_{a+1} = q^2u_a$, etc.

Par ailleurs, si $u_{a+p} = q^p u_a$, alors $u_{a+p+1} = qu_{a+p} = q^{p+1}u_a$.

Nous admettrons qu'il en résulte la formule : $u_{a+p} = q^p u_a$.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \geq a}$ une suite géométrique de premier terme u_a et de raison q. Pour tout entier n supérieur ou égal à a, on a $u_n = q^{(n-a)} u_a$.

Théorème

Pour tout réel q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Théorème

Trois réels positifs non nuls a, b, c, pris dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique (ou proportionnelle) de a et c (à savoir $b^2 = ac$).

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

■

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Résoudre une équation, c'est déterminer, et décrire du mieux possible, l'ensemble des objets mathématiques satisfaisant à certaines conditions.
S'il s'agit d'équations définies dans $\mathbb{R}$, les objets cherchés sont des réels, et les conditions sont représentées par des égalités ou des inégalités (dans le cas présent, on parle d'inéquations).
S'il s'agit d'équations définies dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ..., on parle d'équations à plusieurs inconnues.

Quand les conditions à satisfaire correspondent à plusieurs équations ou inéquations, on parle de système d'équations, ou d'inéquations.

Pour résoudre une équation, ou une inéquation, chaque fois qu'il est possible, on la transforme en une équation équivalente, c'est-à-dire admettant le même ensemble de solutions, et que l'on est capable de résoudre.

On transforme une équation définie dans $\mathbb{R}$ en une équation équivalente :

- en ajoutant le même nombre réel aux deux membres ;
- en multipliant les deux membres par le même réel *non nul ;*
- en élevant au carré les deux membres, *à condition qu'ils soient de même signe.*

S'il s'agit d'une équation qui est posée sous forme factorisée, on emploie le théorème : "*Un produit des réels est nul si, et seulement si, l'un (au moins) des facteurs est nul* ".

On transforme une inéquation définie dans $\mathbb{R}$ en une inéquation équivalente :
- en ajoutant le même

nombre réel aux deux membres ;
- en multipliant les deux membres par le même réel *strictement positif ;*
- en élevant au carré les deux membres *à condition qu'ils soient positifs.*

S'il s'agit d'une inéquation sous forme factorisée, on emploie la règle des signes, en présentant le signe de chaque facteur dans un tableau.

Équations du premier degré

Si a et b désignent deux réels, résoudre l'équation qui est définie par :

$x \in \mathbb{R}$ et $ax + b = 0$,
c'est déterminer tous les réels x, tels que $ax + b = 0$,
à savoir tous les réels x dont l'image par l'application f : $\left[x \to ax + b\right]$ est 0.
L'ensemble S des solutions de cette équation est donc l'ensemble des antécédents de 0 par f.

Quand $a \neq 0$,
$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$;

Quand $a = 0$
et $b \neq 0$, $S = \varnothing$;

Quand $a = 0$
et $b = 0$, $S = \mathbb{R}$.

Systèmes d'inadéquations du premier degré à une inconnue

Si l'on veut résoudre un système d'inéquations du premier degré à une inconnue, on résout séparément chacune des inéquations, et l'on conclut en tenant compte de ce que:

- si x doit vérifier deux inadéquations simultanées, alors il faut que x fasse partie de l'intersection des ensembles de solutions de chacune des deux inéquations ;

- si x doit vérifier l'une ou l'autre des deux inéqua-

tions, à ce moment x doit appartenir à la réunion des ensembles de solutions de chacune des deux inéquations.

Si l'on étudie le signe d'un produit, cela revient à étudier plusieurs systèmes d'inéquations.

Équations, inéquations à deux inconnues

La résolution de l'équation du premier degré à deux inconnues définie dans $\mathbb{R}^2$ par $ax + by + c = 0$ est la recherche de tous les couples de réels satisfaisant à une telle condition. Soit S l'ensemble de ces couples :

$$S = \left\{ (x, y)\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \atop ax + by + c = 0 \right\}.$$

Dans la mesure où a et b sont nuls, S est égal à $\mathbb{R}^2$ ou à $\varnothing$, suivant que c est nul ou non.

Si a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'ensemble S est l'ensemble des couples de coordonnées des points d'une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.

Tout système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$ définit S. Ainsi, à partir d'un point $M_0\ (x_0, y_0)$ de $\mathcal{D}$ et du vecteur directeur $\vec{u}\ (-b, a)$, on obtient :

$$\begin{cases} x = x_0 - tb \\ t \in \mathbb{R} \\ y = y_0 + ta \end{cases}$$

d'où :

$$S = \left\{ (x_0 - tb, y_0 + ta), \atop t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Systèmes de deux équations

Considérons le système d'équations défini dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Ce système admet un couple solution unique si, et seulement si, son déterminant $ab' - ba'$ est non nul.
Si $ab' - ba'$ est nul, le système admet une foule de solutions, ou bien n'en admet aucune.

Géométriquement, ce système s'interprète par l'intersection de la droite D dont l'équation est $ax + by + c = 0$, avec la droite D' dont l'équation est $a'x + b'y + c' = 0$.

Le cas où $ab' - ba' \neq 0$ correspond au cas où D et D' sont sécantes. Le couple solution est le couple des coordonnées du point d'intersection.

Le cas où $ab' - ba' = 0$ correspond au cas où D et D' sont confondues (une foule de solutions) ou tout à fait parallèles (point de solution).

Il est aussi possible d'interpréter un tel système par la recherche de réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, où $\vec{u}$ désigne le vecteur de coordonnées (a, a'), $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (b, b') et $\vec{w}$ le vecteur de coordonnées $(-c, -c')$.

Le cas où $ab' - ba' \neq 0$ correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Le vecteur $\vec{w}$ se décompose alors de manière unique dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Le cas où $ab' - ba' = 0$ correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Alors, le vecteur $\vec{w}$ se décompose d'une foule de façons s'il est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et d'aucune façon s'il n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Lorsqu'il s'agit de résoudre ce genre de système, nous avons la possibilité d'employer la méthode de substitution, ou la méthode de combinaisons linéaires. En réalité, si l'on sait que le système proposé admet une solution unique, toute méthode qui permettrait de parvenir de façon rapide à cette solution unique est utilisable.

Équations du second degré

Soit f une fonction polynôme du second degré. Il existe des réels a, b et c tels que $a \neq 0$ et que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Le réel a étant non nul, on a :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Suivant les processus de factorisation, il faut essayer de faire apparaître un développement remarquable. Pour cela, si l'on considère que $\frac{b}{a}x$ est le double produit de x par $\frac{b}{2a}$, on a :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Donc :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Il résultera de ce développement que :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Théorème

Soit f une fonction polynôme du second degré, définie par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$(a \neq 0)$.

Alors :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

On dit alors qu'on écrit $f(x)$ sous *forme canonique*.

Soit

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$(a \neq 0)$.

On a :

$$af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le réel a étant non nul, l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ a les mêmes solutions que l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Théorème

Considérons l'équation définie par :

$x \in \mathbb{R}$

et

$ax^2 + bx + c = 0$

$(a \neq 0)$.

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* du polynôme

$ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution unique, $x' = -\frac{b}{2a}$, que l'on nomme alors *racine double* de l'équation.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions (ou racines) distinctes :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Considérons le signe d'un polynôme du second degré:

Soit
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$(a \neq 0)$
On a :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Le carré d'un réel étant positif, nous avons :

- Si $b^2 - 4ac$ est négatif non nul, alors $af(x)$ est positif non nul pour tout réel x, et $f(x)$ est du même signe que a pour tout réel x.

- Si $b^2 - 4ac$ est nul, alors $af(x)$ est nul pour $x = -\frac{b}{2a}$, et positif non nul pour tout réel x différent de $-\frac{b}{2a}$.

- Si $b^2 - 4ac$ est positif non nul, soit x' et x'' les racines de $f(x)$ (supposons $x' < x''$).

Nous avons :
$af(x) = a^2(x - x')(x - x'')$.

Alors
$af(x)$ est strictement positif pour tout x de $]-\infty, x'[\cup]x'', +\infty[$;
$af(x)$ est strictement négatif pour tout x de $]x', x''[$;
$af(x)$ est nul pour $x \in \{x', x''\}$.

Il en résulte alors le théorème suivant :

Théorème

Soit
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$(a \neq 0)$.

- Si $b^2 - 4ac < 0$, alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, alors $f(x)$ est nul pour $x = -\frac{b}{2a}$, et du signe de a pour tout réel x différent de $-\frac{b}{2a}$.

Si $b^2 - 4ac > 0$, soit x' et x'' les racines de $f(x)$ (supposons $x' < x''$).

Alors :
$f(x)$ est du signe a pour tout élément x de $]-\infty, x'[\cup]x'', +\infty[$,
$f(x)$ est nul pour $x \in \{x', x''\}$,
$f(x)$ est du signe de $-a$ pour tout élément x de $]x', x''[$.

Grâce à ce théorème, il est possible de résoudre les inéquations du second degré.
Mais on peut également résoudre d'autres problèmes. Ainsi, déterminer la position d'un nombre α par rapport aux racines x' et x'', sans calculer ces dernières.

Considérons la somme et le produit des racines.

Soit
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$(a \neq 0)$.

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $f(x)$.

Si Δ est positif, $f(x)$ s'annule pour des réels x' et x'' $(\text{si } \Delta = 0, x' = x'')$.

Alors, pour tout réel x :
$f(x) =$
$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$
$a[x^2 - (x' + x'') + x'\,x'']$.

Suite à l'unicité de la forme réduite d'un polynôme, nous obtenons :

$x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et
$x' x'' = \frac{c}{a}$.

Théorème

Soit
$f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si le discriminant Δ de $f(x)$ est positif, alors l'équation définie par $f(x) = 0$ admet deux racines, x' et x'', telles que :
$x' + x'' = -\frac{b}{a}$ et
$x' x'' = \frac{c}{a}$.

Les deux réels x' et x'' ont une somme S et un produit P si, et seulement si, ils sont les solutions de l'équation du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par $x^2 - S_x + P = 0$.

Soit des réels x' et x'', de somme S et de produit P.
On a alors $S^2 - 4P \geq 0$
et x' et x'' sont les solutions de l'équation du second degré définie dans $\mathbb{R}$ par :
$X^2 - SX + P = 0$.

La forme canonique d'un polynôme du second degré permet de considérer le sens de variation, et de déterminer le maximum, ou le minimum de la fonction polynôme associée.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$,
$a \neq 0$.
On a
$f(x) =$
$a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$
$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} + a(x + \frac{b}{2a})^2$.

Pour tout réel x,
$(x + \frac{b}{2a})^2$ est positif, et
$a(x + \frac{b}{2a})^2$ est du signe de a.

Le résultat en est que $f(x)$, est pour tout x, supérieur ou inférieur à $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, selon le signe de a.

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2, définie par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$(a \neq 0)$.

- Pour $a > 0$, f admet un minimum égal à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$.
- Pour $a < 0$, f admet un maximum égal à $\frac{4ac - b^2}{4a}$, atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$.

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré 2, définie par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$(a \neq 0)$,.

- Pour $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$ croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.
- Pour $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty, -\frac{b}{2a}]$, décroissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

Soit une équation au sein de laquelle l'inconnue figure sous un radical.
Dans ce cas, il y a lieu de préciser, avant toute recherche, l'ensemble des réels qui donnent un sens aux expressions considérées. Après résolution, il ne faudra conserver que les solutions appartenant à cet ensemble.
Soit l'équation définie par :

$x \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{x^2 + 7} = \sqrt{8x}$.

$x^2 + 7$ est positif pour tout x, et donc $\sqrt{x^2 + 7}$ a un sens pour tout x.

Pour que $\sqrt{8\ x}$ soit défini, il faut et il suffit que x soit réel positif. Tout réel x solution de l'équation proposée sera donc élément de $\mathbb{R}^+$.
Par ailleurs, deux nombres positifs sont égaux si, et seulement si, leurs carrés sont égaux.

Par suite, la condition qui définit l'équation équivaut à
$x^2 + 7 = 8x$,
c'est-à-dire à
$x^2 - 8x + 7 = 0$.
Or on a $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$. Donc :

$$\begin{aligned} & x^2 - 8x + 7 \\ &= x^2 - 8x + 16 - 9 \\ &= (x - 4)^2 - 9 \\ &= (x - 4 + 3)(x - 4 - 3) \\ &= (x - 1)(x - 7). \end{aligned}$$

Les solutions (1 et 7) de l'équation définie par
$x^2 - 8x + 7 = 0$
étant des réels positifs, l'ensemble S des solutions de l'équation est donc :
$S = \{1, 7\}$.

Lorsque, dans une inéquation, l'inconnue figure sous un radical, on précise, comme dans le cas d'une équation, l'ensemble des valeurs du réel x qui donnent un sens aux expressions considérées. Ensuite on résoud en observant les règles suivantes :

- une racine carrée est un réel positif ;

- un réel qui admet une racine carrée est positif ;

- la somme de deux réels positifs est un réel positif ;

- deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Résolution algébrique des équations

Traditionnellement, on entend, par cette expression, la résolution des équations grâce à des radicaux carrés, cubiques, etc.

Un procédé qui permet de résoudre les équations de degré 2, 3 et 4.

Les mathématiciens ont fait de nombreuses investigations pour trouver des formules de résolution analogues pour les degrés suivants, principalement pour le cinquième.

Parmi les recherches les plus importantes dans ce domaine, on peut évoquer celles de Tschirnhaus : en 1689, il essaie, par un changement de variable, de ramener toute équation algébrique à une équation binômiale. Plus précisément, soit $P(x) = 0$ une équation de degré n. Posons $y = Q(x)$, Q étant étant un polynôme de degré n - 1 à coefficients indéterminés. On élimine x entre les deux équations $P(x) = 0$ et $Q(x) - y = 0$, et l'on détermine les coefficients du second polynôme de manière à éliminer, dans l'équation résultante en y, certains ou l'ensemble des termes intermédiaires. Dans la mesure où le processus de Tschirnhaus réussissait toujours, toute équation serait algébriquement résoluble.

Une ère nouvelle naît avec Vandermonde, le précurseur et le premier ouvrier de la théorie des substitutions. Il distingue les fonctions cycliques invariantes par une permutation circulaire déteminée et décompose les fonctions symétriques en fonctions cycliques. Bien évidement, il n'y parvient pas pour les degrés 5 et 6, mais il montre combien il serait prématuré de conclure à l'impossibilité de la résolution des équations générales de degré supérieur à 4. Puis il remarque que, si sa méthode est un échec pour ces équations générales, elle réussit pour des équations particulières dont les racines sont liées par certaines relations.

Gauss, de son côté, expli-

cite les travaux de Vandermonde au sujet des équations binômes $x^n - 1 = 0$, et les fonde solidement sur les propriétés arithmétiques de l'exposant.

Les géomètres, notamment, s'intéressèrent aux recherches de Vandermonde et Gauss, en ce qui concerne les fonctions entières de plusieurs variables et les changements qu'elles éprouvent dans une permutation de ces variables.
Lagrange démontra que le nombre des valeurs d'une fonction de *n* lettres est toujours un diviseur de *n* !, produit des *n* premiers entiers.
En 1799, Ruffini vérifia que si une fonction de cinq variables comporte moins de cinq valeurs distinctes, elle ne peut en avoir plus de deux. Un tel théorème n'établit pas l'impossibilité de la résolution algébrique de l'équation générale du cinquième degré; néanmoins, il prouve l'impossibilité de former une équation auxiliaire ou résolvante de degré inférieur à 5.

Au début du XIX^{e} siècle, Abel démontre qu'une fonction de 5 lettres ayant cinq valeurs distinctes est symétrique par rapport à 4 lettres. Si l'on applique ce théorème à la résolution algébrique des équations, on constate que si l'on veut faire dépendre la résolution de l'équation générale du cinquième degré de celle d'une résolvante de ce même degré, on revient à la transformation de Tschirnhaus.

Après que Ruffini eut démontré l'impossibilité de la résolution algébrique de cette équation générale du cinquième degré, Abel établit que, si deux racines d'une équation irréductible sur le corps des coefficients sont telles que l'une ait la possibilité de s'exprimer rationnellement par

l'autre, l'équation est résoluble par radicaux si son degré est un nombre premier ; s'il n'est pas premier, sa résolution dépend d'équations de degrés moindres que le sien.

Galois a une approche différente. En nommant *groupe* d'une équation, sur un corps donné, le groupe des permutations de ses racines qui laissent inchangées les expressions polynômiales des racines dont la valeur appartient à ce corps, il établit que, dans une résolution par radicaux, et dans les réductions successives que subit, durant les calculs, le groupe de l'équation, chaque nouveau groupe est un sous-groupe invariant du précédent.

SUITES .
LANGAGES DES LIMITES

■

SUITES CONVERGEANT VERS ZÉRO

Un certain nombre de suites sont telles que leur terme général u_n peut être rendu aussi voisin de zéro que l'on souhaite, à condition que n soit assez grand. On dit, pour résumer cette propriété, que ces suites tendent vers zéro quand n tend vers $+\infty$ ("plus l'infini"), ou encore que ces suites convergent vers zéro.

Théorème

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers zéro.
On note :
$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$ ou
$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Ainsi on compare la suite v_n à une suite connue convergeant vers zéro.

Si, par exemple, l'on montre que $(|v_n|)$ peut, à partir d'un certain rang, être majorée par une suite convergeant vers zéro, on pourra conclure que la suite (v_n) elle-même converge vers zéro.

Théorème

Soit (v_n) une suite numérique. On suppose qu'il existe une suite (u_n) qui converge vers zéro, un réel a, et un entier naturel n_0 tels que, pour tout n supérieur à n_0, on ait :
$|v_n| \leq a|u_n|$.
Alors la suite (v_n) converge vers zéro, et l'on note $\lim (v_n) = 0$ ou $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

SUITES CONVERGEANT VERS UN RÉEL

Dans la mesure où de nombreuses suites ne convergent pas vers zéro, on remarque que les valeurs prises par la suite sont de plus en plus voisines d'un certain réel non nul l au fur et à mesure que n est de plus en plus grand. Ce qui nous conduit à :

Définition

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l, pour exprimer que la suite $(u_n - l)$ converge vers zéro. On dit alors que l est la limite de (u_n), et l'on note $l = \lim (u_n)$.

SUITES DIVERGEANT VERS L'INFINI

Il existe un certain nombre de suites telles que leur terme général peut être rendu aussi grand qu'on le souhaite, à condition que leur rang en soit assez grand. Si l'on veut résumer cette propriété, on dit que ces suites tendent vers plus l'infini quand n tend vers $+\infty$, ou encore que ces suites divergent vers plus l'infini.

Théorème

La suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ("plus l'infini"). On note : $\lim (\sqrt{n}) = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) diverge vers $+\infty$, il est possible de la comparer à une suite connue qui diverge vers $+\infty$. Ainsi, par exemple, dans la mesure où l'on montre que (v_n) peut, à partir d'un certain rang, être minorée par le truchement d'une suite divergeant vers $+\infty$, on pourra conclure que la suite (v_n) elle-même diverge vers $+\infty$.

Théorème

Soit (v_n) une suite numérique. On suppose qu'il existe une suite (u_n) qui diverge vers $+\infty$, un réel strictement positif a, et un entier naturel n_0 tels que pour tout n supérieur à n_0, on ait : $v_n \geq au_n$. Alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$, et l'on note : $\lim (v_n) = +\infty$ ou $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

SUITES DIVERGEANT VERS MOINS L'INFINI

Définition

On dit qu'une suite (u_n) diverge vers moins l'infini (" $-\infty$") si, et seulement si, la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$. On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim (u_n) = -\infty$.

LIMITE RÉELLE EN UN RÉEL

Limite réelle en zéro

Soit I un intervalle contenant 0, et soit f une fonction définie sur I, sauf peut-être en 0. De manière intuitive, dire que la fonction f admet la limite l en 0 revient à dire que $f(x)$ peut être rendu aussi proche de l que l'on veut, pourvu que x soit assez voisin de 0

Théorème

Soit I un intervalle contenant 0 tel que $I \neq \{ 0 \}$, et soit f une fonction définie sur I sauf peut-être en 0. S'il existe un réel l, un réel positif a et un élément n de $\mathbb{N}^* \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ tels que, pour tout x élément d'un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ inclus dans I, on ait $|f(x) - l| \leq a |x|^n$, alors la fonction f admet l comme limite en 0. On note : $\lim_{x \to 0} f(x) = l$.

Ce théorème est valable quand n est un rationnel (ou même un réel) strictement positif quelconque.
Si la fonction f admet une limite en 0, cette limite est alors unique.
Le théorème qui figure ci-dessous rassemble les résultats qui ont trait aux fonctions usuelles.

Théorème

Les fonctions qui suivent admettent la limite 0 en 0 :
- la fonction racine carrée ;
- les fonctions puissance n pour tout entier naturel non nul n ;
- la fonction sinus.

Limite réelle en x_0

Définition

Soit I un intervalle et x_0 un de ses éléments. On suppose que $I \neq \{x_0\}$. On dit qu'une fonction f définie sur I, sauf peut-être en x_0, admet la limite l en x_0, pour exprimer que la fonction g définie par $g(h) = f(x_0 + h)$ admet la limite l en 0.

CONTINUITÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Il est possible d'étudier la limite en x_0 de la fonction f si x_0 est un point de I, ou s'il est une borne de I.

Si x_0 est élément de I, si la fonction f admet une limite en x_0, cette limite est nécessairement égale à $f(x_0)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0. Si f admet une limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche) en x_0, on dit que la fonction f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en x_0.

Fonctions continues

Nous admettrons que les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition. Pratiquement, nous trouverons des fonctions discontinues lorsque la définition d'une fonction fera intervenir des intervalles qui se raccordent, et sur lesquels la fonction se trouve définie par des formules différentes.

Les fonctions qui suivent sont continues en tout point de leur ensemble de définition :

- fonctions constantes, fonctions puissances, fonctions polynômes ;
- fonction racine carrée ;
- fonctions rationnelles quotient de fonctions polynômes);
- fonctions sinus, cosinus, tangente ;
- fonction valeur absolue.

Théorèmes

Soient f et g deux fonctions continues en un point x_0. Alors, les fonctions suivantes sont aussi continues en x_0 :
- fonction somme : $f + g$;
- fonction produit : fg ;
- combinaison linéaire : $af + bg$ (quels que soient les réels a et b) ;
- fonction quotient : $\frac{f}{g}$, pourvu que g ne s'annule pas en x_0.

Soit f une fonction continue en x_0 et soit g une fonction continue en $y_0 = f(x_0)$. La fonction composée $g \circ f$ est alors continue en x_0.

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

Prolongement par continuité

Considérons une fonction f qui admet une limite (ou une limite à droite, ou une limite à gauche) et un réel x_0 pour lequel elle n'est pas définie ; on peut alors être amené à compléter la définition de f en donnant cette limite comme image de x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0, sauf en x_0, et admettant en x_0 la limite l. La fonction $\bar{f}$ définie par :
$\bar{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$ et
$\bar{f}(x_0) = l$,
s'appelle prolongement par continuité de f en x_0.

Grâce aux définitions ayant trait au prolongement par continuité, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction non définie en x_0 et soit g une fonction continue en x_0, coïncidant avec f sur un intervalle I contenant x_0. Alors :
- si x_0 n'est pas une borne de I, la fonction f admet en x_0 une limite égale à $g(x_0)$;
- si x_0 est une borne de I, on obtient une conclusion semblable concernant la limite à droite ou à gauche (suivant le cas) de f en x_0.

Fonctions continues sur un intervalle

Une fonction f est continue sur un intervalle I si, et seulement si, elle est continue en tout point de I. Une fonction continue sur un intervalle I a des propriétés remarquables. Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors l'image $f\langle I\rangle$ de I par f est un intervalle.

Même si I et son image ne sont pas généralement de même nature, nous admettrons alors que :

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné (ou segment) I par une fonction f continue sur I est un intervalle fermé borné.

Parfois, le théorème ci-dessus peut s'exprimer sous la forme ci-après :
Une fonction f, qui se trouve définie et continue sur un intervalle fermé borné I :
- est bornée, et a atteint ses bornes ;
- prend, au moins une fois, toute valeur comprise (au

sens large) entre ses bornes.

Considérons l'application à la résolution d'équations.

Soit une équation définie dans $\mathbb{R}$ par une relation de la forme $f(x) = c$ (où f désigne une fonction numérique continue).

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on a la possibilité de prouver l'existence de solutions, et d'en donner des encadrements. A cette fin, on se fonde sur l'un des résultats suivants, corollaires évidents du théorème précédent :

Corollaire 1

Une fonction f définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ prend, au moins une fois sur cet intervalle, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire 2

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires. Alors, il existe au moins un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(c)$ soit nul.

Limites infinies en un réel x_0

Définition

Soit f une fonction définie et strictement positive sur un intervalle $]a, b[$ contenant x_0, sauf en x_0 (resp. sur un intervalle $]x_0, b[$, resp. sur $]a, x_0[$).

On dit que la fonction f admet en x_0 la limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche) $+\infty$ ("plus l'infini") pour exprimer que la fonction $\frac{1}{f}$ admet 0 pour limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche) en x_0.

De façon intuitive, dire que f admet en x_0 la limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche) $+\infty$ revient à dire que $f(x)$ peut être rendu aussi grand qu'on le veut, pourvu que x soit assez voisin de x_0.

Définition

Une fonction g admet $-\infty$ pour limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche), en x_0 si, et seulement si, la fonction $-g$ admet $+\infty$ pour limite (resp. limite à droite, resp. limite à gauche) en x_0.

Limites en l'infini

Considérons des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$. Or, on peut constater que, quand x est "grand" en valeur absolue, son inverse est voisin de 0, et d'autant plus voisin de 0 que x est grande. Cette constatation nous mène intuitivement à la définition suivante :

Définition

Soit l un élément de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que la fonction f admet la limite l en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) pour exprimer que la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet l pour limite à droite (resp. à gauche) en 0.

Nous pouvons alors procéder à un exercice en considérant la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Calculer $g(x) = f\frac{1}{x}$. Quelle est la limite à droite de g en 0 ?

PROPRIÉTÉS DES LIMITES

■

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Les fonctions numériques opèrent la substitution de nombres réels en nombres réels. Les limites constituent des nombres réels ou des éléments infinis. Or, l'ensemble des réels a une structure formée par les opérations (addition, soustraction, multiplication, division) et la relation d'ordre. Tout naturellement, nous prêterons attention aux relations possibles entre les limites et cette structure.
Rappelons tout d'abord cette propriété :

Théorème

Si une fonction admet une limite quand x tend vers α, cette limite est unique.

Pour ce qui est des notations, certaines propriétés sont valables dans le cas de limites finies comme dans celui de limites infinies, dans le cas de limites en un réel x_0 comme dans le cas de limites en un élément infini.

Pour diminuer le nombre des énoncés, et sauf avis contraire, α et λ désigneront symbolique-ment aussi bien des réels que les symboles $+\infty$ ou $-\infty$.
Cette convention permet de regrouper plusieurs théorèmes en un seul, mais doit être utilisée avec prudence.

LIMITES ET ORDRE

Quand, dans un certain intervalle, les valeurs prises par deux fonctions sont rangées dans un certain ordre quel que soit le réel de cet intervalle, on se reportera au théorème figurant ci-dessous :

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I, sauf peut-être en α, de façon que, pour tout x de I, on ait

$f(x) \leq g(x)$.

On suppose en outre que

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lambda$ et que

$\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lambda'$.

Alors : $\lambda \leq \lambda'$.

Ce théorème admet de nombreuses conséquences qui permettent d'énoncer autant de règles de comparaison. Il se peut que, dans certains cas, on dispose même de résultats qui permettent de prouver l'existence d'une limite, ce que ne permet pas le théorème énoncé ci-dessus.

Considérons tout d'abord le résultat suivant, que l'on appelle quelquefois "théorème des gendarmes" ou "théorème du sandwich".

Théorème

Considérons deux fonctions f et h définies sur un même intervalle I. Soit g une fonction définie sur I. Supposons que, pour tout x de I tel que les expressions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ ont un sens, on ait : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $f(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite réelle l quand x tend vers α, alors $g(x)$ admet aussi la limite l quand x tend vers α.

S'il s'agit de limites infinies, citons le théorème suivant :

Théorème

Soient deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I, sauf en α, et telles que, pour tout x de I, on ait $f(x) \leq g(x)$:

- si la fonction f admet la limite $+\infty$ quand x tend vers α, alors il en est de même de g ;
- si la fonction g admet la limite $-\infty$ quand x tend vers α, alors il en est de même de f.

Soit une fonction f continue strictement monotone sur un intervalle I dont les bornes α et β sont des réels ou des éléments infinis.

On sait que l'image $f < I >$ de I par une fonction f continue sur I est un intervalle. Dans le cas d'une fonction continue, strictement monotone sur I, nous admettrons le résultat suivant, où α et β désignent des réels ou alors des éléments infinis :

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$ $\left(\text{resp. } [\alpha, \beta[, \text{ resp. }]\alpha, \beta], \text{ resp. } [\alpha, \beta]\right)$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f admet une limite (à droite) en α et une limite (à gauche) en β. La fonction f est alors une bijection de I sur $f\langle I \rangle = \left]\lim_{x \to \alpha} f(x), \lim_{x \to \beta} f(x)\right[$ $\left(\text{resp. } f\langle I \rangle = [f(\alpha), \lim_{x \to \beta} f(x)[, \text{ resp. }]\lim_{x \to \alpha} f(x), f(\beta)], \text{ resp. } [f(\alpha), f(\beta)]\right)$.

DÉRIVÉES

■

Nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel x_0. Le nombre dérivé de f en x_0 est, si elle existe et s'il s'agit d'un nombre réel, la limite en x_0 du taux de variation de f entre x et X_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Quand x_0 est une borne de I appartenant à I, on définit de façon analogue le nombre dérivé $f'_d(x_0)$ de f à droite en x_0 ou bien alors le nombre dérivé $f'_g(x_0)$ de f à gauche en x_0.

On sait que $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Posons maintenant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Par définition, $\lim_{x \to x_0} \varepsilon x = 0$.

Nous obtenons alors la relation suivante :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) \varepsilon(x).$$

On peut en conclure que y est une valeur approchée de $f(x)$, l'erreur étant $(x - x_0) \varepsilon(x)$, où ε est une fonction de limite nulle en x_0.

Si l'on pose $x = x_0 + h$, on a alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\,\varepsilon_1(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0.$$

définit de proche en proche les dérivées successives d'ordre 3, 4, etc., la dérivée d'ordre n de f se notant $f^{(n)}$.

Fonction dérivée

Considérons f une fonction définie sur un intervalle I. La fonction f' qui, à tout x de I, associe, s'il existe, le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x, est la fonction dérivée de f. Son ensemble de définition est un sous-ensemble de l'ensemble de définition de f.

Dérivées successives

La fonction f', fonction dérivée d'une fonction f, est à son tour une fonction, qui admet une fonction dérivée.

Cette fonction dérivée est notée f'' et appelée dérivée d'ordre 2, ou dérivée seconde de f. Ainsi, on

Dérivation des fonctions composées

Considérons f et g comme deux fonctions telles que la fonction $f \circ g$ soit définie sur un intervalle contenant le réel x_0. On suppose que g est dérivable en x_0 et que f est dérivable en $y_0 = g(x_0)$. On obtient, par le biais de ces conditions :

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + h\,g'(x_0) + h\,\varepsilon_1(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0.$$

et :

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + kf'(y_0) + k\,\varepsilon_2(k), \text{ avec } \lim_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0.$$

Si nous posons :
$y_0 = g\ (x_0)$ et
$k = h\ g'(x_0) + h\ \varepsilon_1\ (h)$,

nous obtenons :
$f\ [\ g\ (x_0 + h)] =$
$f\ (y_0 + k) =$
$f\ (y_0) +$
$\big(h\ g'(x_0) + h\ \varepsilon_1\ (h)\big)$
$f'(y_0) + k\ \varepsilon_2\ (k)$.

soit :
$f \circ g\ (x_0 + h)' =$
$f \circ g\ (x_0) +$
$h\ g'(x_0)\ f'(y_0) +$
$h\ \varepsilon\ (h)$,

avec :
$\varepsilon\ (h) = \varepsilon_1\ (h)$
$f'(y_0) +$
$\big[\ g'(x_0) + \varepsilon_1\ (h)\big]$
ε_2
$\big(h\ g'(x_0) + h\ \varepsilon_1\ (h)\big)$.

Ce calcul, pas très difficile, mais qui implique ordre et méthode, peut être simplifié en négligeant les produits de termes infiniment petits.

Toutefois, on ne doit pas se servir de cette méthode en dehors du cas présent :

$g\ (x_0 + h) \approx$
$g\ (x_0) + h\ g'\ (x_0)$

et

$f\ (y_0 + k) \approx$
$f\ (y_0) + k\ f'(y_0)$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions telles que la fonction $f \circ g$ soit définie sur un intervalle contenant un réel x_0. Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $y_0 = g\ (x_0)$, alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en x_0, et l'on a :
$[f \circ g]'(x_0) =$
$g'(x_0) \times f' \circ g\ (x_0)$.

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On a admis que :

- pour tout x de I, $f'(x) = 0$, si, et seulement si, f est constante sur I ;
- pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, si, et seulement si, f est croissante sur I ;
- pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, si, et seulement si, f est décroissante sur I ;

- si pour tout x de I, $f'(x) < 0$, alors f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout x de I, $f'(x) > 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Une fonction f qui se trouve définie sur un intervalle I est strictement croissante sur I si elle est croissante sur I et si elle n'est constante sur aucun sous-intervalle de I non réduit à un point. On conclue alors que la dérivée d'une fonction strictement croissante sur I peut s'annuler, à condition que les valeurs annulant cette dérivée ne forment point un sous-intervalle de I.

L'étude directe du signe $f'(x)$ peut se révéler difficile, voire même impossible. Néanmoins, l'étude du signe $f''(x)$ peut se révéler plus facile. En l'occurence, on en déduira le sens de variation de f', puis, si possible, son signe. Il est en effet clair que, par exemple, si une fonction croissante s'annule pour une valeur a, alors elle prendra des valeurs positives pour tout x supérieur à a. Si l'on se sert de telles propriétés, au besoin appliquées à des dérivées d'ordre supérieur, on pourra, dans certains cas, étudier le sens de variation de la fonction f.

PRIMITIVES . INTÉGRALES

■

PRIMITIVES

Il arrive fréquemment que l'étude d'un problème conduise à la détermination d'une fonction dont on connaît la dérivée. Donnons alors la définition suivante :

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et soit F une primitive de f sur I. Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f. On l'appelle intégrale de a à b de la fonction f.

Nous produisons maintenant l'exemple suivant :

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}^*$, on a par exemple $F(x) = -\frac{1}{x}$.

Nous constatons donc que la recherche de primitives apparaît comme l'opération inverse de la dérivation. Mais, contrairement au problème de celle-ci, le problème de recherche de primitives n'a pas de solution systématique.
Néanmoins, l'ensemble des propriétés de la dérivation peut fournir des propriétés ayant trait à la recherche des intégrales.

Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

On sait que la dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle. Il en résulte que, si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors il en est de même pour toute fonction G définie sur I par :

$G(x) = F(x) + C$
(où C désigne une constante réelle).

Réciproquement, nous admettrons que si f peut admettre sur un intervalle I une primitive F, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions :

$[\ x \to F(x) + C\ ]$.

Il est possible de déterminer une primitive satisfaisant à une condition supplémentaire. Ainsi, il arrive souvent que l'on soit conduit à chercher une primitive F de f telle que, pour une valeur x_0 déterminée de I, $F(x_0) = y_0$ (où y_0 désigne un réel donné). Il suffit pour cela de déterminer la constante C.

Nous admettrons aussi qu'une fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Pour tout élément x_0 de I et pour tout réel y_0, il existe une primitive unique F de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

INTÉGRALES

Soit f une fonction définie et continue se trouvant sur un intervalle $I = [\ a, b\ ]$. On a vu que f admet sur I des primitives, et que, si F et G désignent des primitives de f sur I, alors il y a un réel C tel que, pour tout x de I :
$F(x) = G(x) + C$. Il en résulte que : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et soit F une primitive de f sur I. Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f. On l'appelle intégrale de a à b de la fonction f.

On note alors :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b.$$

Propriétés

Comme résultat de la définition ci-dessus, nous pouvons dire que quels que soient les réels a et b, et quelle que soit la fonction f définie et continue sur $[a,b]$:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0;$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt;$$

$$\int_a^b 0\,dt = 0.$$

LINÉARITÉ

Suivant les propriétés de la dérivation, et suivant la définition de l'intégrale, nous pouvons conclure :

Théorème

Soient f et g des fonctions définies continues sur un intervalle $[a, b]$; soient α et β des réels :

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I comprenant des réels a, b, et c. Alors, si F est une primitive de f sur I :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les éléments a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

INÉGALITÉS

Soient a et b des réels, tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit alors F une primitive de f sur $[a,b]$. Supposons par ailleurs que, pour tout un réel de x de $[a, b]$, $f(x)$ soit positif. La fonction F admettant f pour dérivée sur $[a,b]$ est alors croissante sur cet intervalle, et $F(b) \geq F(a)$.

Théorème

Soient a et b des réels, tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est un réel positif.

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle qui est $[a, b]$, $(a \leq b)$. Si nous supposons, par

ailleurs, que pour tout x de $[a, b]$ on ait :

$$f(x) \leq g(x).$$

Il en résulte que, pour tout x de $[a, b]$, on ait : $g(x) - f(x) \geq 0$.

Consécutivement au théorème précédent, nous avons :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0.$$

Théorème

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ $(a \leq b)$. Si pour tout x de $[a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

SYMÉTRIE, PÉRIODE

Nous admettrons tout d'abord les résultats suivants :

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Alors, quel que soit le réel a :

$$\int_0^T f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx.$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors, pour tout réel positif x :

$$\int_{-x}^{0} f(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt.$$

- Si f est impaire, alors, pour tout réel positif x :

$$\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 0.$$

Inégalité de la moyenne

Les fonctions les plus élémentaires définies sur un intervalle $[a, b]$ sont les fonctions constantes. Soit f une fonction conti-nue sur un intervalle $[a, b]$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une fonction constante dont l'intégrale sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction f. Admettons qu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel x de $[a, b]$, on ait $m \leq f(x) \leq M$.

Il en résulte que (si $a < b$) :

$$\int_a^b m \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b M \, dt ;$$

c'est-à-dire :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \leq M(b-a)$$

ou encore :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t) \, dt}{b-a} \leq M.$$

Posons $\mu = \frac{\int_b^a f(t) \, dt}{b-a}$;

il vient :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mu(b-a) = \int_a^b \mu\,dt.$$

Nous constatons que le réel μ apparaît comme la valeur d'une fonction constante dont l'intégrale sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction f.

Théorème

La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est comprise entre les bornes m et M de f sur $[a, b]$.

Nous connaissons ce théorème sous le nom d'*inégalité de la moyenne.*
On a, en particulier, le corollaire suivant :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{\int_a^b f(t)}{b-a}.$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que, pour tout x de l'intervalle $[a, b]$, $|f(x)| \leq k$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq k\,|b-a|.$$

Intégration par parties

Soient F et G deux fonctions dérivables sur un intervalle, et dont les dérivées f et g sont conti-nues sur $[a, b]$. Nous pouvons écrire, selon la règle de dérivation d'un produit de fonctions :

$$(F, G)'(x) = F(x)g(x) + f(x)G(x).$$

Inversement, cette règle permet de conclure que le produit FG est la somme d'une primitive de Fg ainsi que d'une primitive de Gf.

On obtiendra alors sur $[a,b]$ un résultat permettant de transformer le calcul d'une intégrale portant sur la fonction Fg en le calcul d'une intégrale portant sur la fonction $f G$. C'est la méthode "d'intégration par parties" :

$$[F(x)G(x)]_a^b = \int_a^b F(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx.$$

Théorème

Soient F et G des fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ et dont les dérivées f et g sont continues sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b F(t)\,g(t)\,dt = [F(t)\,G(t)]_a^b - \int_a^b G(t)\,f(t)\,dt.$$

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

INTRODUCTION AUX LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Historiquement, l'idée qui se trouve à la base de la notion de logarithme est la comparaison de la suite des entiers et de la suite des puissances correspondantes d'un nombre a :

$$1, 2, 3, ..., n$$
$$a, a^2, a^3, ..., a^n.$$

Cette comparaison avait déjà été étudiée par Archimède.

Vers la fin du XV^e siècle, Nicolas Chuquet constata que, si l'on fait correspondre les termes de même rang, à la somme de deux nombres de la progression arithmétique correspond alors le produit des nombres de la progression géométrique.

Mais le véritable développement de la notion de logarithme se situe au début du XVII^e siècle grâce à l'Ecossais John Napier, ou Neper, et au Suisse Joost Bürgi. Tous deux eurent l'idée d'introduire des nombres intercalaires en quantité suffisante, et ils construisirent des tables permettant de passer d'une progression à l'autre.

Les toutes premières tables de logarithmes décimaux furent confectionnées par Henry Briggs qui fit des logarithmes un moyen de calcul numérique pratique.

Les fonctions logarithme et exponentielle s'introduisent progressivement en analyse au cours du XVII^e siècle, et vont être étroitement liées à la création ainsi qu'au développement du calcul infinitésimal.

Fonction logarithme népérien

Nous admettrons qu'il existe une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, et dont la dérivée sur $\mathbb{R}^*_+$ est

la fonction inverse, et qui ne s'exprime pas par le biais des fonctions élémentaires déjà connues.On peut alors donner la définition suivante :

La fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ est la fonction logarithme népérien.

On note :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Il est à remarquer que cette fonction In est également notée Log.
Du fait qu'il faut inscrire ce L en capitale implique que cette notation est de plus en plus abandonnée au profit de la notation internationale ln.

Propriétés

Nous pouvons donc conclure, d'après ce qui précède, que :

- la fonction In est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De plus : $\ln 1 = 0$.

La dérivée de la fonction In est la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$:

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

Cette dérivée prend sur $\mathbb{R}_+^*$ des valeurs strictement positives. Nous pouvons donc conclure :

La fonction In est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que, quels que soient les réels a et b :

- si $a < b$, alors $\ln a < \ln b$,
- si $\ln a = \ln b$, alors $a = b$,
- si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$,
- si $1 < a$, alors $\ln a > 0$.

Soit a un réel strictement positif, et soit ϕ_a la fonction qui est définie sur $\mathbb{R}^*+$ par :

$$\phi_a(x) = \ln(ax).$$

Nous aurons alors :

$$\phi_a(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions ϕ_a et In admettent donc la même fonction dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. On conclut qu'il existe donc un réel K tel que, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\phi_a(x) = \text{In}(ax) = \text{In } x + K.$$

Pour $x = 1$, on obtient en particulier : $K = \text{In } a$.

Il en résulte que :
quels que soient les réels strictement positifs a et b :

$$\text{In}(ab) = \text{In } a + \text{In } b.$$

Quel que soit le réel strictement positif b :

$$b\frac{1}{b} = 1.$$

Donc :

$$\text{In}\left(b\frac{1}{b}\right) = \text{In } 1 = 0.$$

Soit :

$$\text{In } b + \text{In}\frac{1}{b} = 0.$$

Il en résulte que :

$$\text{In}\frac{a}{b} = -\text{In } b.$$

On en conclut que, quels que soient les réels strictement positifs a et b :

$$\text{In}\frac{a}{b} = \text{In}\left(a\frac{1}{b}\right) =$$

$$\text{In } a + \text{In } b.$$

Donc :

$$\text{In}\frac{a}{b} = \text{In } a - \text{In } b.$$

Quel que soit le réel strictement positif a :

$a^2 = a \times a$.
Donc :
$\text{In } a^2 =$
$\text{In } a + \text{In } a = 2 \text{ In } a$.

Supposons que :
$\text{In } a^n = n \text{ In } a$,

On a alors :
$\text{In } a^{n+1} =$
$\text{In}(a^n a) =$
$\text{In } a^n + \text{In } a$;
$= n \text{ In } a + \text{In } a$;
$= (n+1) \text{ In } a$.

Limites

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$x^2 > x > \sqrt{x}.$$

Donc :

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Il en résulte que :

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

c'est-à-dire :

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 < \ln 2 < [2\sqrt{x}]_1^2.$$

Soit :

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 2(\sqrt{2} - 1) < 1.$$

Pour tout entier naturel, non nul, n, on a :

$$\ln 2^n = n \ln 2.$$

Il en résulte que :

$$\frac{n}{2} < \ln 2^n < n.$$

Aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty.$$

Il en résultera, puisque la fonction ln est croissante :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet une bijection réciproque.

Définition

Une fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*_+$, on note $y = \exp x$ si, et seulement si, $x = \ln y$.

Selon cette définition, les théorèmes sur les fonctions réciproques et les propriétés de la fonction ln, résultent les propriétés suivantes :

- La fonction exponentielle est une application continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^*_+$. Pour tout réel x, $y = \exp x$ est équivalent de $x = \ln y$.
En particulier : $\exp 0 = 1$ et $\exp 1 = e$.
- Puis, pour tout réel x, $\ln(\exp x) = x$.
Pour tout réel strictement positif x, $\exp(\ln x) = x$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Quels que soient les réels x et y, $x < y$ équivaut à $\exp x < \exp y$.
Considérons maintenant la propriété fondamentale. Selon celle du logarithme népérien, pour tout couple (a, b) de nombres réels strictement positifs :

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

Or, pour tout couple (x, y) de nombres réels, les nombres réels $a = \exp x$ et $b = \exp y$ sont strictement positifs. Donc :

$$\ln(\exp x \exp y) = \ln(\exp x) + \ln(\exp y),$$
$$= x + y,$$

c'est-à-dire :

$$\ln(\exp x \exp y) = \ln(\exp(x + y)).$$

Théorème

Comme la fonction ln est bijective, quels que soient les réels x et y,
$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$.

Les conséquences successives sont les suivantes :

$$1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \exp(-x),$$

d'où :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

et :

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)),$$

d'où :

$$\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}.$$

Par ailleurs :

$\exp 2x = (\exp x^2)$,

$\exp nx =$
$\exp(x + (n - 1)x) =$
$\exp x \exp(n - 1)x$,

d'où, par récurrence :

$\exp nx = (\exp x)^n$,
pour tout entier naturel n,
et :

$\exp(-nx) = \frac{1}{\exp nx} =$
$\frac{1}{(\exp x)^n} = (\exp x)^{-n}$,
pour tout entier naturel n.

Considérons q un entier naturel non nul. Pour tout nombre réel x, on a :

$$\exp x = \exp\left[q\left(\frac{1}{q}x\right)\right] = \left(\exp\frac{1}{q}x\right)^q$$

d'où :

$$\exp\left(\frac{1}{q}x\right) = (\exp x)^{\frac{1}{q}}.$$

Par suite, pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$:

$\exp(rx) = (\exp x)^r$.

Il résulte que, pour tout nombre rationnel r :
$\exp r = (\exp 1)^r = e^r$.

On décide alors d'énoncer la définition suivante qui correspond aux définitions antérieures, pour tout nombre rationnel r, et qui définit l'élévation à une puissance irrationnelle.

Définition

Pour tout nombre réel x, on pose :

$e^x = \exp x$.

Avec cette notation, les différentes propriétés que nous avons rencontrées plus haut se traduisent par les règles de calcul sur les exposants. En voici un résumé.

Quels que soient les nombres réels x et y :

$e^{x+y} = e^x e^y$;

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;

$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$;

$e^{rx} = (e^x)^r$ pour tout nombre rationnel r.

Suite à cette notation, les propriétés de définition de

l'exponentielle s'écrivent :

$y = e^x$ équivaut à $x = \ln y$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$; pour tout réel x, $\ln e^x = x$; pour tout réel strictement positif x, $e^{\ln x} = x$; pour tout réel x, $e^x > 0$; $x < y$ équivaut à $e^x < e^y$.

Fonctions puissances

Soit α un réel quelconque. Notons f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Suivant les règles de dérivation des fonctions composées que nous avons rencontrées, la dérivée de f_α est donnée par :

$$f'_\alpha(x) = (\alpha \ln x)' e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Théorème

Quel que soit le réel α, la fonction f_α (fonction "puissance α") telle que :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

est définie sur $\mathbb{R}^*_+$, et sa dérivée est donnée par :

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Exponentielles et fonctions composées

- Si u est une fonction numérique :

La fonction $f = e^u$, définie par $f(x) = e^{u(x)}$, admet le même ensemble de définition que u.
Sur cet ensemble de définition, si u est dérivable :

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

La fonction $g = \ln u$, telle que $g(x) = \ln u(x)$ est définie si, et seulement si, $u(x)$ est défini et strictement positif.

L'ensemble de définition de g constitue donc l'ensemble des antécédents par u des réels qui se trouvent être strictement positifs.

Cet ensemble est noté : $u^{-1}\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$.

Sur cet ensemble, si u est dérivable :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

La fonction $h = u^{\alpha}$ se trouvedéfinie pour tout réel par :

$$h(x) = [u(x)]^{\alpha} = e^{\alpha \ln u(x)} = e^{\alpha g(x)}.$$

Elle admet alors le même ensemble de définition que g, à savoir $u^{-1} < \mathbb{R}^*_+ >$. Sur cet ensemble de définition :

$$h'(x) = ag'(x)e^{\alpha g(x)} = \frac{au'(x)}{u(x)}[u(x)]^{\alpha} = \alpha u'(x)[u(x)]^{\alpha - 1}.$$

- Si u et v sont deux fonctions numériques, la fonction $k = u^v$ est définie par:

$$k(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Cette fonction admet le même ensemble de définition que la fonction $[x \mapsto v(x) \ln u(x)]$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{D}_v \cap u^{-1}\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$.

On a $\ln k(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \ln u(x)$.

Par conséquent, la fonction dérivée de le fonction k est définie par :

$$k'(x) = [v(x)\ln u(x)]' e^{v(x)\ln u(x)};$$

c'est-à-dire :

$$k'(x) = \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right] u(x)^{v(x)}.$$

Pour ce qui est de l'application à la recherche de primitives, il est important de savoir reconnaître (et éventuellement introduire) dans la recherche des primitives d'une fonction, les dérivées de fonctions de la forme e^u ou $\ln u$.

Application aux limites

La connaissance de la fonction dérivée de la fonction f nous permet de déterminer certaines limites. Nous sommes en mesure de rappeler que :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Échelle de fonctions

Afin de comparer les fonctions usuelles qui ad-mettent la limite $+\infty$ en $+\infty$, il est possible d'étudier la limite en $+\infty$ de leur quotient.

Théorème

Quel que soit le réel strictement positif α :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

De la même façon, on connaît plusieurs espèces de fonctions qui sont susceptibles d'admettre une limite infinie en 0 ou en ∞.

Pour comparer la vitesse avec laquelle ces fonctions tendent vers l'infini, on peut étudier la limite de leur quotient. On peut aussi utiliser des changements de variable.

Théorème

Quel que soit le réel strictement positif α :

$$\lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0.$$

Échelle de suites

Les résultats obtenus d'après les théorèmes ci-dessus s'appliquent naturellement au cas des suites.

En ce qui concerne les suites qui ont pour limite $+\infty$:

Théorème

Quels que soient les réels a et α tels que $a > 1$ et $\alpha > 0$:

$$\lim (a^n) = +\infty ;$$

$$\lim (n^{\alpha}) = +\infty.$$

En outre :

$$\lim \left(\frac{n^{\alpha}}{\ln n}\right) = +\infty ;$$

$$\lim \left(\frac{a^n}{n^{\alpha}}\right) = +\infty.$$

Le théorème qui concerne les suites qui ont pour limite 0 est le suivant :

Théorème

Quels que soient les réels a et α tels que $|a| < 1$ et $\alpha < 0$:

$$\lim (a^n) = 0 ;$$

$$\lim (n^{\alpha}) = 0.$$

En outre :

$$\lim \left(\frac{a^n}{n^{\alpha}}\right) = 0.$$

NOMBRES COMPLEXES

NOMBRES COMPLEXES

A l'origine, les nombres imaginaires furent introduits en tant que symboles purement formels destinés à rendre compte des propriétés des équations algébriques. Ils sont utilisés de façon courante au XVIII[e] siècle, mais ce n'est qu'au siècle suivant qu'ils seront définis et utilisés correctement. C'est alors le formidable développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe et l'irruption des imaginaires dans tous les domaines des mathématiques.

Aperçu historique

Au XVI[e] siècle, alors que de nombreux mathématiciens hésitaient encore à employer les nombres négatifs, Cardan et ses élèves commencèrent à introduire dans les calculsdes symboles purement formels comme $\sqrt{-a}$, $a > 0$.

Ces symboles représentaient le résultat de l'extraction "impossible" de la racine carrée du nombre négatif $-a$; ils décrivent scrupuleusement des règles de calcul qui permettent de manipuler ces nouveaux "nombres", appelés par eux *nombres impossibles.*

Au départ, il fallait seulement donner des racines à *toutes* les équations du second degré. Par la formule dite de Cardan, Bombelli montre, en 1572, que la racine $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$ peut alors s'écrire :

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 4.$$

Ce qui met en évidence le fait que certaines quantités réelles peuvent être repré-

sentées par des expressions en apparence imaginaires. Ainsi, grâce à la formule de Cardan, on peut représenter des racines réelles par le truchement d'opérations effectuées sur des nombres impossibles, ou "imaginaires".

C'est ainsi que les nombres imaginaires permettent des méthodes de calcul grâce auxquelles on peut obtenir des résultats "vrais" qu'il serait souvent beaucoup plus long ou difficile de se procurer directement.
La possibilité, admise implicitement, d'étendre aux nombres complexes la plupart des notions relatives aux nombres réels devait être mise en question par la *controverse des logarithmes* des nombres complexes. Méfiance et différentes contradictions furent finalement évacuées par Euler. Qui comprit qu'il était nécessaire d'abandonner le caractère univoque du logarithme afin de parvenir à une théorie satisfaisante, et qui établit de nombreuses formules ayant trait aux fonctions élémentaires d'une variable complexe.

Corps des nombres complexes

Théorème et définition

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

est un corps commutatif, d'élément unité (1, 0), appelé corps des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.

Le corps $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{R}$; en outre, l'élément (0, 1), noté i, est tel que $i^2 = -(0, 1)$.

NOTATION $a + ib$

Soit $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des complexes de la forme $(a,0)$, où a est réel.
La bijection ϕ de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}$ qui, à tout élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$ associe le réel a permet d'identifier les éléments de $\mathbb{R}_1$ à ceux de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de noter a l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$. Pour tout couple (a, b) on obtiendra alors : $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$, soit en se servant de l'identification précédente ainsi que de la notation $i = (0, 1)$: $(a, b) = a + ib$.

Ainsi, tout nombre complexe s'écrit sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels. Cette écriture est unique puisque l'égalité $a+ib = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels signifie que $(a, b) = (a', b')$, à savoir que $a = a'$ et $b = b'$.

Théorème et définition

Pour tout nombre complexe z, il existe un couple (a, b) de réels et un seul tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement nommés partie réelle et partie imaginaire de z et sont notés Re (z) et Im (z).

Il est nécessaire de remarquer que le nombre complexe $a + ib$, avec a et b réels, est nul si, et seulement si, $a = b = 0$.
Les nombres complexes non nuls de la forme iy, où y est un réel non nul, sont nommés *imaginaires purs.*

L'égalité $(iy)^2 = -y^2$ montre que le carré d'un nombre imaginaire pur est un réel strictement négatif.

RÈGLES DE CALCUL DANS $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calcul qui ont trait à l'addition et

à la multiplication de $\mathbb{R}$ s'appliquent à $\mathbb{C}$ qui, comme $\mathbb{R}$, est un corps commutatif.

En particulier :

- La différence $z - z'$ de deux nombres complexes z et z' se trouve être le nombre complexez $+(-z')$, où $-z'$ désigne l'opposé de z'.

Si z et z' sont les affixes de M et M', $z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M}$.

- Quels que soient les complexes z, z', z'', on a :

$$z(z' - z'') = zz' - zz''.$$

- Pour tout complexe z et pour tout entier naturel n, on définit z^n par :

$z^0 = 1$ (si z est non nul),

$$z^1 = z, z^2 = zz, \ldots, z^{n+1} = z^n z.$$

Quels que soient les entiers naturels n et p :

$$z^n z^p = z^{n+p}$$
et
$$(z^n)^p = z^{np}.$$

- Quels que soient les complexes z_1 et z_2 :

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$$

En particulier :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i$$
$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2ab\,i$$
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Quel que soit l'entier naturel non nul n :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + z_1^{n-3} z_2^2 + \ldots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}).$$

En particulier :

$$1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}).$$

BINOME DE NEWTON

Considérons la formule du binôme de Newton. Etant donnés deux nombres complexes z_1 et z_2 et un entier naturel n :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k,$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

et où l'on convient de poser $z_1^0 = 1$ et $z_2^0 = 1$, même si z_1 et z_2 sont nuls.

- Ainsi, on a la possibilité de noter l'inverse de tout complexe non nul par z^{-1}.

Si $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Il faut donc retenir :

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

- Si z_1 et z_2 constituent deux nombres complexes non nuls, le produit $z_1 z_2$ se trouve non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}.$$

De façon plus générale, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes non nuls, le produit $z_1 z_2 \ldots z_n$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_n} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} \times \ldots \times \frac{1}{z_n}.$$

En particulier, si z se trouve être un complexe non nul et n un entier naturel :

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

- Etant donné les deux nombres complexes α et β tels que $\beta \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z tel que $\alpha = \beta z$, à savoir :

$$z = \beta^{-1} \alpha.$$

En effet, si le nombre complexe z_1 satisfait $\alpha = \beta z_1$, on obtient en multipliant par β^{-1} les deux membres de cette égalité :

$$\beta^{-1} \alpha = \beta^{-1} (\beta z_1),$$

d'où

$$\beta^{-1} \alpha = (\beta^{-1} \beta)_{z_1},$$

et par suite

$$z_1 = \beta^{1} \alpha.$$

De plus, $\alpha = \beta (\beta^{-1} \alpha)$.

CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour tous réels a et b, on a:

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

L'expression $a^1 + b^2$, qui n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$, l'est donc dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle s'écrit comme le produit de deux nombres

complexes $a + ib$ et $a - ib$, de même partie réelle et de parties imaginaires opposées.

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels, est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, défini par $\bar{z} = a - ib$.

Voyons maintenant les propriétés ; il est immédiat que :

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$
$$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

Il en résulte que, pour tout nombre complexe z :

z est réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$;

z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\bar{z}$.

Ces deux propriétés ont de l'importance, car elles interviennent dès qu'il faut exprimer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur.

On remarque que les conjugués de la somme, de la différence et du produit de deux nombres complexes z et z' sont respectivement la somme, la différence et le produit des conjugués de z et z'.
En outre, si z' n'est pas nul, le conjugué du quotient de z par z' est le quotient des conjugués. En effet, si l'on pose :

$Z = \frac{z}{z'}$, on a :

$z = Z\,z'$,

d'où $\bar{z} = \bar{Z}\,\bar{z}'$,

et par suite $\bar{Z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Par récurrence, on démontre que pour tout entier naturel n,
$(\overline{z^n}) = (\overline{z})^n$.

On peut noter, en résumé :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

$$\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$

si $z' \neq 0$,

$$\left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

si $n \in \mathbb{N}$,

$$(\overline{z^n}) = (\overline{z})^n.$$

Applications des nombres complexes à la trigonométrie

Considérons le calcul de cos nx et sin nx en fonction de cos x et sin x.
La méthode consiste à appliquer la formule de Moivre (ci-dessous)

Formule de Moivre

$(\cos\theta + \sin\theta)^p = \cos p\theta + i \sin p\theta.$

et la formule déjà étudiée du binôme de Newton, et à utiliser la relation :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$n = 2$

On a : $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$ et $(\cos x + i \sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x$. D'où :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$n = 3$

On a : $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$, et $(\cos x + \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$, d'où :

$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$ $\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.

Si l'on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$, on obtient :

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$
$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

Si $3x \neq \frac{\pi}{2} (2\pi)$, on a $\cos 3x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors : $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x}$.

Après avoir divisé le numérateur et le dénominateur par $\cos^3 x$, on obtient :

$$n = 4$$

On a : $(\cos x + \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$ et : $(\cos x + \sin x)^4 = \cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x$.

Nous obtenons alors :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x.$$

Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient :

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2)^2,$$

d'où :

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$
$$\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x = 2 \sin 2x \cos 2x.$$

Si $4x \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$ et $x \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$ on a

$\cos 4x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$.

Alors :

$$\tan 4x = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \frac{4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x}{\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}.$$

Après avoir divisé le numérateur et le dénominateur par $\cos^4 x$, on obtient :

$$\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}.$$

LINEARISATION DE POLYGONES TRIGONOMETRIQUES

Il faut exprimer $\cos^p x \sin^q x$ comme somme de termes de la forme :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On utilise les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton :

$$\cos^p x \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p$$

et

$$\sin^q x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q.$$

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Considérons le trinôme du second degré $az^2 + bz + c$, où a est un nombre complexe non nul et b et c deux nombres complexes quelconques. Pour tout complexe z, on a :

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

Par suite :

$$az^2 + bz + c = \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad (1).$$

Le second membre de cette égalité se nomme alors *forme canonique* du trinôme $az^2 + bz + c$.

Voyons maintenant la résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Dans cette équation, a, b, c sont des nombres complexes donnés et a n'est pas nul. Désignons par d une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$. La relation (1) sera notée :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{d}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{d}{2a}\right).$$

C'est ainsi que la résolution de $az^2 + bz + c = 0$ se ramène à celle de :

$$a\left(z + \frac{b - d}{2a}\right)\left(z + \frac{b + d}{2a}\right) = 0.$$

Or, pour qu'un produit de nombres complexes soit nul, il faut et il suffit qu'un des nombres complexes au moins soit nul ; les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont donc :

$$\frac{-b + d}{2a} \text{ et } \frac{-b - d}{2a}.$$

Elles sont égales si $d = 0$, et distinctes sinon.

Nous sommes donc en mesure d'énoncer :
soient a, b, c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions :

$z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ et

$z_2 = \frac{-b-d}{2a}$

où d désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac \neq 0$,

alors $z_1 \neq z_2$.

Si $b^2 - 4ac = 0$,

alors $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

On dit que l'équation a une racine double.

Le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ se nomme le *discriminant* de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Considérons maintenant la résolution sur $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels.

Si les coefficients a, b, c, sont des nombres réels ($a \neq 0$), le discriminant Δ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est réel. S'il est positif, ses racines carrées sont $\sqrt{-\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$.

Pour toute équation $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul, b, c deux réels quelconques :

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une seule solution :

$\frac{-b}{2a}$, réelle.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

NOMBRES RÉELS

■

NOMBRES RÉELS

Ordre dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ comprend une relation d'ordre, notée "$\leq$ ". Il faut aussi rappeler les règles ci-dessous qui permettent d'aborder avec méthode les problèmes de comparaison :

- Deux nombres réels qui sont positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.

- Deux nombres réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire à celui de leurs inverses.

- Si l'on veut comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

- Si l'on veut comparer deux nombres strictement positifs, il est également possible d'étudier la position de leur quotient par rapport à 1.

Rappelons en outre les définitions suivantes :

Considérons A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

- On dit que A est majoré s'il existe un réel M tel que, pour tout x élément de A, on ait $x \leq M$. Le réel M est appelé *majorant* de A. Si M est élément de A, c'est le plus grand élément (ou maximum) de A.

- On dit que A est minoré s'il existe un réel m tel que, pour tout x élément de A, on ait $m \leq x$. Le réel m se nomme *minorant* de A. Si m est élément de A, c'est le plus petit élément (ou minimum) de A.

- Si A est majoré ou minoré, on dit qu'il est borné.

Soit f une fonction et E un sous-ensemble de définition de f. On note $f < E >$ l'ensemble des images par f des éléments de E. On dit que f est majorée (resp. minorée) sur E si $f < E >$ est majoré (resp. minoré) : une fonction est majorée (resp. minorée) si elle majorée (resp. minorée) sur son ensemble de définition.

Utilisation du signe Σ

Si l'on veut utiliser une expression formée par la somme de termes obtenus pour des valeurs successives d'un entier, l'on se sert du signe Σ ("sigma"), une notation pratique qui est employée dans les exemples figurant ci-après, permettant d'en comprendre l'utilisation.

$$1 + 2 + 3 + \dots 9 = \sum_{k=1}^{9} k,$$

$$1 + 2 + 3 + \dots n = \sum_{k=1}^{n} k,$$

$$6 + 7 + 8 \dots + 19 = \sum_{k=6}^{19} k,$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + 91 = \sum_{k=0}^{45} 2k + 1,$$

$$9 + 16 + 25 + \dots + n^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2,$$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \dots + p^3 = \sum_{k=n}^{p} k^3,$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \ldots + p^3 = \sum_{k=n}^{p} k^3,$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

Pour toute suite (u_n),
l'expression $\sum_{k=p}^{q} u_k$ désigne
la somme des valeurs u_k
prises par la suite (u_n)
pour
les entiers successifs
compris
(au sens large) entre p et q.

Comme la lettre k fait partie d'une notation symbolique, cette lettre n'a aucune valeur en elle-même. C'est ce que l'on appelle une variable "muette".

Entiers naturels et récurrence

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Il est constitué de points "isolés", ce qui veut dire que, quel que soit l'entier naturel n, il existe un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ dont l'intersection avec $\mathbb{N}$ ne contient que n.

L'une des principales propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$ est le principe de récurrence. Celui-ci consiste en une extension à l'infinité des entiers naturels d'une propriété intuitivement évidente lorsque nous sommes en présence d'un nombre fini d'entiers consécutifs.
Etudions ce principe.
Soit une propriété qui, pour un entier naturel a, peut être vraie ou fausse.
Si :
- la propriété se trouve vraie pour $a = 0$,

- lorsque la propriété est vraie pour $a = p$, alors elle est vraie aussi pour $a = p + 1$, et ceci, quel que soit l'entier naturel p, alors on peut conclure que la propriété est vraie pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

On peut considérer une autre forme.

Si :
- la propriété se trouve vraie pour $a = n_0$,
- lorsque la propriété est vraie pour $a = p$, alors elle est vraie aussi pour $a = p + 1$, et ceci, quel que soit p supérieur ou égal à n_0, alors on peut conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel supérieur à n_0.

PROBABILITÉS

PROBABILITÉS

Introduction

Le calcul des probabilités constitue certainement l'un des domaines les plus récents des mathématiques, bien qu'il ait en fait plus de trois siècles et demi d'existence. Après s'être cantonné dans l'étude des jeux de hasard, il s'est introduit dans presque toutes les branches de l'activité scientifique : analyse (théorie du potentiel), économie, génétique (lois de Mendel), physique corpusculaire, psychologie et informatique, bien sûr.

Sans paradoxe, il est possible d'avancer que toutes les mathématiques anciennes sont un cas particulier du calcul des probabilités, le *certain* étant de l'*aléatoire* dont la réalisation a une probabilité qui est égale à 1.

La théorie des probabilités est entrée dans les mathématiques par le biais des jeux - une opération financière depuis la Haute Antiquité - et elle a actuellement des applications aux échelons les plus élevés de la science théorique. La notion de jet répété d'une pièce est devenue l'un des schémas fondamentaux de l'expérience mathématique, le modèle du hasard, de l'indépendance et de l'équiprobabilité.
Les notions probabilistes d'espérance, de risque provinrent aussi des jeux, et sont devenues plus tard fondamentales dans l'assurance sur la vie, comme partie de la statistique. Les théories modernes des files d'attente, du trafic routier et de l'optimisation en sont dérivées.

Expérience aléatoire

Prenons un sac qui contient six jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; si l'on tire deux jetons au hasard,

simultanément, on peut obtenir différents résultats. Une telle opération dont le résultat est imprévisible est une *expérience aléatoire.*

Il est naturel de faire figurer le *résultat* d'un tirage par la paire formée des nombres inscrits sur les deux jetons tirés, par exemple {2, 5}, {3, 5}, ... L'ensemble des résultats possibles, ou *univers des possibles,* est donc l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4 , 5, 6}.

On le note Ω.
Son cardinal est :
$C_6^2 = 15$.

Le résultat {2, 5} *réalise l'événement,* "la somme des points est 7".
Deux autres résultats : {1, 6} et {3, 4} réalisent aussi cet événement que l'on peut représenter par la partie de l'univers des possibles formée des éléments {1, 6}, {2, 5}, {3, 4}.
De même, "le plus petit nombre est 3" est un événement représenté par la partie de Ω : {{3, 4}, {3, 5}, {3, 6}}.

De façon plus générale, on appelle *événement* toute partie A de l'univers des possibles. Dire qu'un résultat possible ω *réalise* l'événement A signifie alors que:

$\omega \in A$.

Le cardinal d'un événement est inférieur à celui de l'univers des possibles Ω.

La partie vide de l'univers Ω des possibles est l'*événement impossible.* Ainsi, "la somme des points est 12" est l'événement impossible : aucun résultat ne le réalise.

La partie Ω est l'*événement certain*. Ainsi, "la somme des points est supérieure à 2" est l'événement certain : il est réalisé par tous les résultats.

L'événement "le plus grand nombre est 2" est réalisé par l'unique résultat $\{1, 2\}$: on dit que c'est un *événement élémentaire*.
Les événements élémentaires sont les *singletons* de l'univers des possibles, à savoir les parties de Ω de cardinal 1. Pour tout élément ω de l'univers des possibles Ω, l'événement élémentaire réalisé par ω est $\{\omega\}$.

Singleton

Soit x un ensemble.
L'ensemble admettant x pour unique élément s'appelle singleton de x et se note $\{x\}$.

"La somme des points est 5" et "le plus petit des points est 3" sont respectivement les parties $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ et $\{\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$ de l'univers Ω. Leur intersection est vide : un même résultat ne peut réaliser à la fois ces deux événements.

De façon plus générale, on dit que deux événements A et B sont **incompatibles**, ou **disjoints**, si $A \cap B = \varnothing$, à savoir s'il n'existe aucun résultat qui les réalise simultanément.

Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont incompatibles.

Soient A et B deux événements, à savoir deux parties de l'univers des possibles.

La partie $A \cup B$, réunion de A et B, est appelée événement "A ou B ".

La partie $A \cap B$, intersection de A et B, est appelée événement "A et B ".

Probabilité uniforme

Dans l'expérience aléatoire que nous avons considérée ci-dessus, les 15 tirages possibles se font au hasard; on ne peut obtenir un résultat donné que par un seul tirage : ainsi, le résultat {3, 5} est obtenu en tirant les jetons numérotés 3 et 5. On peut alors penser que les résultats possibles ont tous la même chance de sortir : un sur quinze.

Une justification expérimentale peut étayer cette hypothèse : si l'on effectue des séries de 150 tirages, on remarque que la *fréquence de sortie* d'un résultat donné, à savoir le quotient du nombre de sorties du résultat par le nombre de tirages, est en général proche de un sur quinze. Il est clair que des séries où cette fréquence diffère de beaucoup de un sur quinze peuvent se manifester, mais elles sont rares.

On dit alors que les résultats possibles sont équiprobables et on convient d'affecter à chacun d'eux la probabilité $\frac{1}{15}$. Il est alors naturel d'affecter à un événement A de cardinal p, à savoir réalisé par p résultats, la probabilité $p \times \frac{1}{15}$ égale à $\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

Définition

Dans une expérience aléatoire, lorsque les résultats possibles sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le réel, noté $P(A)$, défini par :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega},$$

où Ω est l'univers des possibles.

Propriétés

Soit $\omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers des possibles de cardinal n associé à une expérience aléatoire.

Les résultats possibles ω_i possèdent des probabilités respectives $P(\omega_i)$, positives, et dont la somme est égale à :

$$1 : \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1.$$

Pour tout événement A, on définit la probabilité de A comme la somme des probabilités des résultats qui réalisent A :

si $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_p}\}$,
alors $P(A) =$
$P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) +$
$... + P(\omega_{i_p})$.

Il en résulte les trois propriétés ci-dessous, qui sont essentielles, car elles permettent de démontrer toutes les autres.

Propriétés

1. Pour tout événement A, $P(A) \geq 0$.

2. La probabilité de l'événement certain est égale à : $P(\Omega) = 1$.

3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Les conséquences en sont les suivantes :

Un événement quelconque A et son contraire $\overline{A}$ sont tels que :
$A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
Donc (propriété 3)
$P(A \cup \overline{A}) =$
$P(A) + P(\overline{A})$, soit
$P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Propriété

Pour tout événement A, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Lorsque $A = \Omega$, $\overline{A} = \varnothing$.

On note alors la formule : $P(\Omega) + P(\varnothing) = 1$.

D'où $P(\varnothing) = 0$: la probabilité de l'événement impossible est nulle.

Par ailleurs, du fait que $P(\overline{A})$ est un réel positif, l'égalité $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ prouve que $P(A) \leq 1$.

Propriété

La probabilité d'un événement quelconque est un réel appartenant au segment $[0, 1]$.

Soient A et B deux événements quelconques ; on a :

$A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ et
$A \cap (B \setminus A) = \varnothing$,
$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ et
$(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Il résulte de ce qui précède:

$P(A) + P(B \setminus A) = P(A \cup B)$,
$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$.

Par addition de ces deux égalités puis simplification, nous obtenons :

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

Propriété

Les probabilités de deux événements quelconques A et B, de leur réunion et de leur intersection sont telles que :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

Il est à remarquer que la propriété 3 apparaît comme un cas particulier de la propriété ci-dessus :

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B)$ est nul et la relation devient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Probabilité conditionnelle

Soit Ω un univers et p une probabilité définie sur Ω. Soit B un événement de Ω de probabilité non nulle. On démontre, et nous l'admettrons que :

l'application p_B de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans le segment $[0, 1]$, définie pour tout événement A de Ω par

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

est une probabilité sur Ω.

Définition

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p, et B un événement de Ω dont la probabilité est non nulle. On appelle probabilité conditionnelle relative à B l'application p_B de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Dans la majorité des cas, on peut déterminer une probabilité conditionnelle par le calcul direct ou en utilisant les probabilités conditionnelles.

Evénements indépendants

Intuitivement, deux événements A et B sont indépendants si la réalisation ou la non-réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation ou la non-réalisation de l'autre. C'est-à-dire que, si A et B sont des événements tels que $p(B) \neq 0$, la probabilité de A est égale à la probabilité de A sachant B. Ce que l'on note :

$$p_B(A) = p(A),$$

soit

$$\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A),$$

d'où

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Si l'on généralise à des événements A et B quelconques, on donne la définition suivante :

Définition

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Schéma de Bernoulli

Une urne contient quatre boules blanches et six boules noires. Au hasard, on tire une boule de cette urne. La probabilité d'obtenir une boule blanche est

$$p(\{B\}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

celle d'obtenir une boule noire est

$$p(\{N\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

L'expérience est répétée cinq fois ; après chaque essai, on remet la boule que l'on a tirée dans l'urne. On suppose que les résultats aux différents tirages sont indépendants les uns des autres. Considérons alors l'événement :

A_3 : "obtenir exactement trois boules blanches durant les cinq tirages".

Des éventualités favorables au sens de l'événement A_3 sont, par exemple:

BNBBN, BBNNB, NBBBN.

La probabilité de l'événement élémentaire {BNBBN} est :
$p(\{BNBBN\}) = p(\{B\})\, p(\{N\})\, p(\{B\})\, p(\{B\})\, p(\{N\})$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$$
$$= \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Les autres événements élémentaires qui comportent trois tirages de boule blanche et deux tirages de boule noire ont même probabilité. Or, ces événements élémentaires sont deux à deux incompatibles et leur nombre est le nombre de façons de placer les trois boules blanches parmi les cinq boules qui ont été tirées, c'est-à-dire :

C_5^3. La probabilité de A_3 est donc :

$$p(A_3) = C_5^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}230\,4.$$

Processus de Bernoulli

La répétition n fois d'une même épreuve élémentaire à deux issues, quand les résultats des expériences successives sont indépen-

dants les uns des autres, se nomme processus de Bernoulli. Les deux issues de l'épreuve élémentaire sont en général appelées *succès* et *échec*.
Nous en avons considéré un exemple ci-dessus.

Souvent, dans un processus de Bernoulli, l'on s'intéresse au nombre d'apparitions de l'issue nommée "succès" durant les n épreuves.
Il faut savoir qu'un processus de Bernoulli est entièrement déterminé par le nombre n de répétitions de l'épreuve élémentaire, et la probabilité p de l'issue "succès" dans cette épreuve élémentaire.

Soit donc un processus de Bernoulli où l'on répète n fois une épreuve élémentaire dans laquelle la probabilité de succès est p.

Le nombre k de succès durant n épreuves est un entier naturel compris (au sens large) entre 0 (on obtient n échecs) et n (on obtient n succès).

Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Considérons $p\ (k\ )$ la probabilité de l'événement A_k :"obtenir k succès exactement durant n épreuves".
Un événement élémentaire favorable au sens de A_k est une suite de n résultats qui comportera k succès et $(n - k\ )$ échecs. A_k est la réunion de l'ensemble des événements élémentaires de cette sorte, et la probabilité d'un tel événement élémentaire est :

$$p^k (1 - p)^{n - k}.$$

Il y a autant d'événements élémentaires distincts que de manières de répartir les k succès parmi les n essais, à savoir C_n^k.

On aura en conséquence l'égalité suivante :

$$p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nous vérifions immédiatement que la somme de toutes les probabilités $p(k)$ sera égale à 1.

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$[p + (1-p)]^n =$$

$$1^n = 1.$$

Définition

Soit n un entier naturel non nul et p un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

L'application de $\{0, 1, ..., n\}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$k \longmapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

se nomme distribution (ou loi) binômiale de paramètres n et p.

On donne alors la définition suivante :

L'étude ci-dessus démontre le théorème ci-dessous :

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.

Nous considérons le processus de Bernoulli comprenant n répétitions d'une même épreuve élémentaire dans laquelle la probabilité de succès est p.

Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

La probabilité d'obtenir k succès dans ce processus de Bernoulli suit une distribution binômiale de paramètres n et p.

Elle est donc égale à :

$$p(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Savoir reconnaître un processus de Bernoulli, et en dégager les paramètres, est essentiel.

A cette fin, rappelons que les trois conditions suivantes doivent être remplies simultanément :

- répétition d'une même épreuve élémentaire ;

- l'épreuve élémentaire a deux issues ;

- les résultats aux différentes épreuves sont indépendants les uns des autres.

VARIABLES ALÉATOIRES

Souvent, une grandeur numérique X est associée à une expérience aléatoire. Ainsi :

- On lance deux dés ; X est le nombre de points obtenus.
- On lance une pièce de monnaie n fois de suite ; X est alors le nombre de côtés "pile" obtenus.
- Dans une urne qui contient 4 boules blanches et 6 boules noires, on prélève cinq boules simultanément ; X est le nombre de boules blanches sorties.

- Dans une urne qui contient 2 boules blanches et 6 boules noires, on tire les boules une par une, sans remise ; X est le rang de la première boule blanche sortie.

La valeur d'une telle grandeur X est aléatoire : elle est dépendante du résultat de l'expérience. On dit alors que X est une *variable aléatoire numérique* (ou *aléa numérique*).

Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire e.
Une variable aléatoire numérique associée à e est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers des possibles Ω muni d'une probabilité P.
A chaque résultat possible ω, élément de Ω, correspond une valeur $X(\omega)$ de X.

Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs de X supposées rangées par ordre croissant et $X(\Omega)$ l'ensemble de ces valeurs :

$$X(\Omega) = \{x_2, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Pour chaque élement x_i de $X(\Omega)$, l'ensemble des résultats ω pour lesquels X prend la valeur x_i est un événement noté $(X = x_i)$.
Ainsi :

$$(X = x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}.$$

L'application f de $X\ (\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui à tout x_i associe :

$$f\ (x_i)\ =\ P\ (X = x_i)$$

est la loi de probabilité, ou distribution, de la variable aléatoire X.

Propriété

Pour toute variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$, on a :

$$P\ (X = x_1) + P\ (X = x_2) + \ldots + P\ (X = x_n)\ =\ 1.$$

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers des possibles Ω muni de la probabilité P. L'ensemble des valeurs qui sont prises par X est :

$$X\ (\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

et pour tout x_i de $X\ (\Omega)$, on note $P\ (X = x_i) = p_i$.

Pour tout réel x l'ensemble des résultats possibles ω pour lesquels X prend une valeur inférieure à x est un événement que l'on note $(X \leq x)$. Ainsi :

$$(X \leq x)\ =\ \{\omega \in \Omega \mid X\ (\omega) \leq x\}.$$

Considérons l'étude de F, et rappelons que les valeurs x_i prises par X sont supposées rangées par ordre croissant :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$ et que

pour tout résultat ω, $X(\omega)$
est une de ces valeurs.

La fonction de répartition
F d'une variable
aléatoire X
prenant les valeurs
$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$
est une fonction en
escalier croissante :

- nulle si $x < x_1$;

- égale à $p_1 + p_2 + \ldots + p_i$ si
$x \in [x_i, x_{i+1}[$;

- égale à 1 si $x \geq x_n$.

STATISTIQUE

STATISTIQUE

Introduction

Le mot "statistique" désigne d'une part un ensemble de donées d'observation, et d'autre part l'activité qui consiste dans leur recueil, leur traitement et leur interprétation.
La paternité de ce terme est généralement attribuée à un professeur de Göttingen, G. Achenwall, qui l'aurait fait dériver de *Staatskunde,* mot allemand qui signifie "science des Etats".

L'histoire nous procure des exemples très anciens de collectes de données. Ainsi le recensement des productions agricoles par un empereur chinois, plus de 2 000 ans avant Jésus-Christ ; ainsi l'institution du cadastre en Egypte où un pharaon fit appliquer la peine de mort à ceux qui refusaient de signaler leur nom, profession et moyens de subsistance.
Aujourd'hui, le recueil de statistiques est une activité importante, indispensable à la gestion des sociétés modernes. Les moyens qui servent à leur traitement consistent dans l'alliance de l'électronique et de l'algèbre linéaire.
Les raisonnements par lesquels on est en mesure de tirer, à partir des observations, des conclusions concernant les lois de probabilité des phénomènes sont codifiés par la statistique mathématique.

C'est à partir des années cinquante que l'accent fut mis sur le fait que l'inférence statistique ne devait pas se fonder uniquement sur l'information contenue dans les données d'observation, mais nécessitait également la prise en compte de la connaissance *a priori* des modèles probabilistes.
A la même époque à peu près l'apparition de calculateurs puissants a généré

les méthodes d'analyse des données multidimensionnelles.
Ces techniques ont plus trait à la description qu'à l'induction ; les résultats auxquels elles conduisent peuvent suggérer des lois, des modèles ou des explications des phénomènes. Toutefois, ces résultats ne permettent pas de porter un jugement, d'appréhender d'une façon formalisée la confiance que doivent inspirer ces lois ou ces modèles.

Vocabulaire

Précisons tout d'abord qu'il ne faut pas confondre les statistiques et la statistique.

- Les statistiques sont des relevés effectués sur des sujets divers : économie, population, fabrication, etc.
Ces relevés se présentent sous forme de *tableaux de données* ou sous forme de *graphiques.*

- La statistique comprend l'ensemble des méthodes mathématiques grâce auxquelles l'on peut étudier les *documents statistiques,* établir la situation présente et passée, présenter ces documents de façon intelligible et servir de base à la prévision.
Il est par conséquent possible de résumer la statistique par la formule :"savoir pour prévoir".

Population, échantillon

Toute étude statistique porte sur un ensemble de référence appelé *population* d'objets, de personnes, d'animaux, de végétaux, de pays, etc. Chaque élément de la population est un *individu* de la population, dont on étudie certaines caractéristiques.

Quand le nombre d'individus de telle ou telle population est très important, ou quand il n'est pas possible de contacter tous les indi-

vidus, ou encore lorsque le relevé à effectuer a pour conséquence la destruction des individus, on ne s'intéresse qu'à une partie, ou *échantillon,* de la population.

Un échantillon ne présente un intérêt que s'il est *représentatif* de la population, à savoir si des conclusions relatives à cet échantillon peuvent être généralisées à la population tout entière.

Pour sélectionner un échantillon représentatif, il existe deux solutions :

-*au hasard,* ce qui implique que la *taille* de l'échantillon soit assez importante ;

- en *miniaturisant* la population, ce qui suppose une parfaite connaissance de sa composition.

Caractère

Pour chaque individu d'une population, ou d'un échantillon de population, on peut relever la valeur d'un ou de plusieurs *caractères.* Ainsi, pour les salariés d'une entreprise, le salaire mensuel brut.

Parmi ces caractères, certains sont *qualitatifs :* sexe, groupe sanguin... Les autres se trouvent être *quantitatifs* et s'expriment par des nombres : âge, taille, poids, salaire, production d'acier...

Un caractère X d'une population se nomme également une *variable statistique.*

Toute valeur prise par le caractère X est une *modalité* de X.

L'étude d'un caractère X se fait à partir d'un *relevé statistique* qui comporte, pour chaque individu d'un échantillon E de population, l'indication de la valeur de X.

L'exploitation d'un tel

document débute par le *classement* des valeurs du caractère X.

Valeur moyenne

Soit une série statistique prenant les modalités x_1, x_2,..., x_p, avec les effectifs n_1, n_2, ..., n_p; sa valeur moyenne, ou moyenne, est le nombre :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$

Ecart-type

La moyenne d'une série statistique ne permet pas de résumer de manière assez précise cette série. Pour mesurer l'étalement d'une série, on utilise une caractéristique de dispersion, nommée écart-type.

Soit une série statistique, de moyenne $\bar{x}$, prenant les modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$, avec les effectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$; son écart-type est le nombre :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_1 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i}} = \sqrt{\frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_p (x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}}$$

Il convient de remarquer que :

- le nombre σ^2 se nomme en fait *variance* de la série statistique. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

- de nombreuses calculatrices, comportant des fonctions statistiques, calculent l'écart-type avec une formule différente de celle inscrite ci-dessus. Il s'agit de l'écart-type d'une série dont on connaît seulement un échantillon.

- la formule de König permet de réaliser souvent simplement le calcul de l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} n_i n_i^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} - \bar{x}^2}.$$

SYSTÈMES LINÉAIRES

■

SYSTÈMES LINÉAIRES

Introduction

Abordons maintenant la résolution des systèmes d'équations linéaires. Les valeurs des inconnues, les coefficients des inconnues et, d'une manière plus générale, l'ensemble des nombres utilisés sont des nombres réels.

On nomme équation linéaire à p inconnues toute relation de la forme :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = \beta,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les *inconnues* et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p réels donnés, nommés *coefficients des inconnues*, et β un réel donné appelé *coefficient du second membre* de l'équation.

On dit qu'un p-uplet de réels $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ vérifie, ou satisfait, l'équation si on obtient une égalité en substituant chaque c_j à chaque x_j dans l'équation. C'est ainsi que le 4-uplet (1, 2, 0, -3) vérifie l'équation $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1$.

Le couple formé par deux équations linéaires à deux inconnues se nomme *système* de deux équations linéaires à deux inconnues; $(3x + 2y = 2, x + y = 1)$ en constitue un exemple.

Par habitude et commodité, on le note :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Nommons (S_1) ce système. S'il s'agit de le *résoudre*, il faut chercher l'ensemble des couples de réels (c_1, c_2), nommés *solutions*, qui vérifient chacune des équations.

Si (x_0, y_0) est solution de (S_1), à savoir si (x_0, y_0) vérifie les deux équations, on a :

$$3x_0 + 2y_0 = 2$$

et

$$x_0 + y_0 = 1.$$

En retranchant trois fois la seconde équation de la première, on obtient alors $-y_0 = -1$, d'où $y_0 = 1$ et par suite $x_0 = 0$, d'après la seconde équation.

Il est à remarquer que l'unique affirmation permise par le raisonnement est alors :" si (S_1) a une solution alors (0, 1) est l'unique solution".
Mais pas :" (S_1) admet (0, 1) pour solution".
Il reste à examiner si (0, 1) est solution. Du fait que 3 x 0 + 2 x 1 = 2 et 0 + 1 = 1, (0, 1) est bien la solution de (S_1), et c'est la seule selon la première partie du raisonnement.
Voyons maintenant le système de trois équations à deux inconnues :

$$(S_2)\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Si le couple de réels (x_0, y_0) était solution, il vérifierait les deux premières équations ; on aurait donc $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, selon le résultat précédent. Du fait que (0, 1) ne satisfait pas la troisième équation, il s'ensuit que le système n'a pas de solution.

On dit alors que les équations sont *incompatibles* et que le système est *impossible.*

Il faut remarquer que le système (S_1) découle du tableau

(3 2 2)
(1 1 1)

et le système (S_2) du tableau

(3 2 2)
(1 1 1)
(2 1 0).

Plus généralement, le n-uplet d'équations :

$$(S)\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \ldots + a_{n\,p}x_p = b_n \end{cases}$$

se nomme un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

$a_{i\,1}x_1 + a_{i\,2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i$ est la i -ème équation du système. Nous la notons L_i. Dans cette équation, les réels $a_{i\,j}$ sont respectivement les coefficients des inconnues x_i et le réel b_i, le coefficient du second membre.

Quand tous les b_i sont nuls, on dit que le système est homogène. Le système homogène associé à (S) s'obtient en remplaçant chaque coefficient des seconds membres par 0.

On nomme *solution* du système, tout p -uplet de réels qui vérifie les n équations du système. Dans le cas où le système est homogène, il admet alors une solution *banale* (0, 0, ..., 0).
Le système (S) est déterminé par le tableau M.

$$M = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \ldots\ldots & \\ a_{1j} \ldots\ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots \\ a_{2j} & \ldots\ a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \ldots \\ a_{nj} & \ldots\ a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

appelé *matrice complète* du système.

Transformation d'un système

On dit que deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont

même ensemble de solutions.

Par une suite finie de transformations élémentaires - au nombre de trois -, associons au système (S) un système équivalent dont la résolution est immédiate.

PERMUTATION
DE DEUX ÉQUATIONS

Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ veut dire que l'on permute la i-ème et la j-ème équation du système.

Ainsi, nous aurons, pour le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = 5, \end{cases}$$

la transformation
$L_1 \leftrightarrow L_3$
conduit au système

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Il est alors immédiat que le second système est équivalent au premier. Donc, si l'on échange deux équations d'un système, on obtient alors un système qui est équivalent au premier.

ADDITION D'UN
MULTIPLE
D'UNE ÉQUATION
A UNE AUTRE ÉQUATION

Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ veut dire que l'on remplace la j-ème équation L_j du système par $L_j + \lambda L_i$, où λ est un réel.

Nous aurons donc ainsi, en ce qui concerne le système:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1, \end{cases}$$

la transformation
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
conduit au système

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 6y - z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases} \text{ et } \begin{cases} L_i \\ L_j + \lambda L_i \end{cases}$$

Du fait que les systèmes ci-dessus sont équivalents, on peut énoncer :

Si, dans un système, on remplace la j-ème équation L_j par l'équation :

$$L_j + \lambda L_i$$

$(i \neq j \text{ et } \lambda \in \mathbb{R})$,

on obtient un système équivalent au premier.

MULTIPLICATION D'UNE ÉQUATION PAR UN NOMBRE RÉEL NON NUL

Pour tout réel α,
$L_i \leftarrow \alpha L_i$ veut dire que l'on remplace la i-ème équation par αL_i.

Considérons ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ \frac{1}{3}x - 2y + \frac{5}{3}z = 0 ; \end{cases}$$

les transformations
$L_1 \leftarrow -L_1$ et
$L_2 \leftarrow 3L_2$
conduisent au système

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x - 6y + 5z = 0. \end{cases}$$

Quand α n'est pas nul, les équations L_i et αL_i sont équivalentes. Par suite :

Si, dans un système, on remplace la i-ème équation L_i par l'équation αL_i, où α est un réel non nul, on obtient un système équivalent au premier.

MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

Supposant $a_{11} \neq 0$ dans le système général (S), la méthode consiste d'abord à faire les transformations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1,$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1, \ldots,$$
$$L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1.$$

De cette façon, nous obtiendrons un système de matrice complète :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & \cdots & a'_{3p} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix}$$

Dans cette première série de transformations élémentaires, le coefficient non nul a_{11} se nomme le pivot.

Après avoir obtenu la matrice M', on choisit un second pivot pour le système, de n - 1 équations à p - 1 inconnues :

$$\begin{cases} a'_{22} x_2 + \ldots \\ + a'_{2p} x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n2} x_2 + \ldots \\ + a'_{np} x_p = b'_n. \end{cases}$$

Dans la mesure où le réel a'_{22} n'est pas nul, on effectue les transformations élémentaires suivantes :

$$L'_3 \leftarrow L'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L'_2,$$

$$\ldots, L'_n \leftarrow L'_n - \frac{a'_{n2}}{a'_{22}} L'_2.$$

On en arrive ainsi à la matrice suivante :

$$M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b''_p \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ b''_n \end{matrix}$$

Il convient de remarquer que :

- si $a_{11} = 0$ et si $a_{i_0 1} \neq 0$, on effectue d'abord la transformation $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.

- si tous les a_{i1} sont nuls, l'inconnue x_1 peut prendre toutes les valeurs réelles. Ainsi le système se réduit à un système de n équations linéaires à $p - 1$ inconnues $x_2, \ldots, x_p$.

Si nous voulons conclure, reprenons les notations générales d'un système (S) de n équations linéaires à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en supposant $a_{11} \neq 0$.

Par le truchement de transformations élémentaires successives et par élimination des lignes dont tous les coefficients sont nuls, on se ramène, soit à un système impossible (système qui comporte une équation $0x_1 + 0x_2 + \ldots$

$0x_p = \beta$, avec $\beta \neq 0$), soit à un système (S') de r équations ($r \leq n$ et $r \leq p$) à p inconnues, équivalent à (S) *et de la forme suivante :*

- la première équation de (S') se trouve être la première équation de (S) : dans cette équation, le premier coefficient non nul est celui, a_{11} de l'inconnue x_1 ;

- dans la deuxième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j2} dont le rang j_2 est tel que $1 < j_2$;

- dans la troisième équation de (S'), le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{j3} dont le rang j_3 est tel que $1 < j_2 < j_3$;

- et ainsi de suite jusqu'à la r-ème équation dans laquelle le premier coefficient non nul est celui d'une inconnue x_{jr} dont le rang j_r est tel que $1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_r \leq p$.

On appelle les inconnues $x_1, x_{j_r}, \ldots, x_{j_r}$ **principales** et les autres **secondaires** ou **libres**.

Le choix des inconnues principales découle du système (S'), à savoir de la manière dont on a transformé (S) pour obtenir (S). Une autre suite de transformations de (S) peut mener à un système (S'') différent de (S'), donc à un autre choix d'inconnues principales.

On ne rencontre par conséquent point d'unicité du choix des inconnues principales. En revanche, on démontre, et nous l'admettrons, que leur nombre r, égal au nombre d'équations du système (S'), demeure invariable.

Cet entier r, intrinsèquement lié au système (S), se nomme le *rang* de (S). Il faut remarquer que ce rang

est inférieur ou égal au nombre n d'équations et au nombre p d'inconnues du système (S).

VECTEURS

■

VECTEURS

Calcul vectoriel

Sur une droite $\mathcal{D}$, il existe deux sens de parcours. Dans la mesure où l'on *oriente* la droite $\mathcal{D}$, l'on choisit un des deux sens du parcours (figure 1).

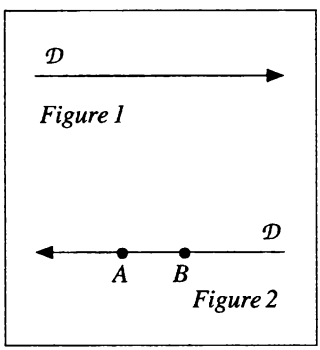

Figure 1

Figure 2

Lorsque $\mathcal{D}$ est orienté, on peut alors déterminer, pour deux points quelconques de $\mathcal{D}$, lequel est *avant* l'autre. Ainsi, sur la figure 2, B est avant A.
Une droite $\mathcal{D}$ orientée et une unité de longueur déterminent un *axe* ; $\mathcal{D}$ est le *support* de l'axe. Lorsque l'on a déterminé une unité de longueur, il existe deux axes qui ont pour support une droite donnée.

Considérons la mesure algébrique d'un bipoint sur un axe. Un *bipoint* est un couple (A, B) de points ; A est l'origine et B l'extrémité du bipoint.
Il faut noter que si les points A et B sont distincts, les bipoints (A, B) et (B, A) sont distincts.
Prenons une unité de longueur, par exemple le centimètre, et considérons sur un axe Δ deux points A et B.

On appelle mesure algébrique du bipoint (A, B), le réel noté $\overline{AB}$ ("AB barre") ainsi défini :

- $\overline{AB}$ est positif lorsque, sur Δ, A est avant B, négatif dans le cas contraire (figures 3 et 4) ;

- sa valeur absolue est la distance entre les points A et B, notée $d(A, B)$, ou AB.

Pour ce qui est des propriétés :
étant donné trois points A, B, C quelconques d'un axe Δ, on a alors :

- $\overline{BA} = -\overline{AB}$;

- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (formule de Chasles) ;

$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

Vecteurs du plan

Dans le plan $\mathcal{P}$, à tout bipoint (A, B) est associé un vecteur $\vec{u}$ qui est représenté sur la figure 3. Le bipoint (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$; on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

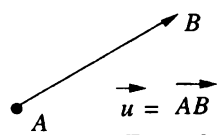

Figure 3

On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

VECTEURS ÉGAUX

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ associés à deux bipoints (A, B) et (A', B') sont égaux si les segments $[A, B']$ et $[B, A']$ ont même milieu.

Autrement dit :

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ signifie que $ABB'A'$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ signifie que :

- les droites $(A\ B)$ et $(A'\ B')$ ont même direction ;
- les demi-droites $[AB)$ et $[A'B')$ sont de même sens ;
- les distances AB et $A'B'$ sont égales.

Les conséquences en sont les suivantes :

- soit A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.

- soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant $(A,\ B)$ et soit O un point du plan (figure 4). Le symétrique M de A par rapport au milieu I de $[O,B]$ est tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

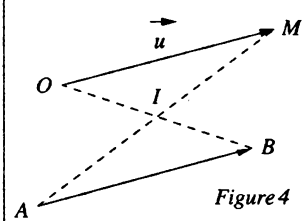

Figure 4

Il s'agit alors du seul point qui vérifie cette égalité.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout point O du plan $\mathcal{P}$, il existe un unique point M de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

VECTEUR NUL

Le vecteur nul est le vecteur qui a pour représentants les bipoints (A, B) tels que $A = B$.

Il est noté $\vec{0}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ signifie que les points A et B sont confondus.

DIRECTION ET SENS D'UN VECTEUR NON NUL

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et (A, B) et (A', B') deux de ses représentants (figure 5).

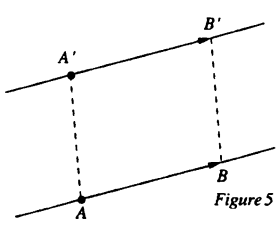

Figure 5

Les points A, B, B', A' constituent les sommets d'un parallélogramme. Il en résulte que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, à savoir ont la même direction, et que les demi-droites $[AB)$ et $[A'B')$ sont de même sens.

La direction d'un vecteur $\vec{u}$ non nul de représentant (A, B) est la direction de la droite $(A B)$.
Son sens est le sens de la demi-droite $[AB)$.

NORME D'UN VECTEUR

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et soit (A, B) et (A', B') deux de ses représentants.

Comme $ABB'A'$ est un parallélogramme (figure 5), on a :

$AB = A'B'$.

La *norme* d'un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) est la distance AB.

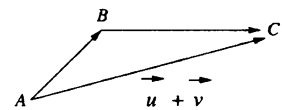

Figure 6

La norme de $\vec{u}$, que l'on nomme aussi longueur de $\vec{u}$, est notée $\| \vec{u} \|$.

Pour tout bipoint (A, B), on a : $\| \overrightarrow{AB} \| = AB$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ obtenu de cette façon ne dépend pas du choix du point A ; ce vecteur, qui ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, se nomme *somme* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et est noté $\vec{u} + \vec{v}$.

Somme de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. A partir d'un point A quelconque de $\mathcal{P}$, construisons les points B et C, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ (figure 6).

Il découle de cette définition, qu'étant donnés trois points quelconques A, B, C du plan :

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

En outre, du fait que
$AC \leq AB + BC$
(figure 6),
il s'ensuit :
$\| \vec{u} \| + \| \vec{v} \| \leq \| \vec{u} \| + \| \vec{v} \|$.

L'*addition vectorielle* est le nom que l'on donne à l'application qui, à deux vecteurs quelconques $\vec{u}$, $\vec{v}$, associe leur somme $\vec{u} + \vec{v}$.

- elle est associative :
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

- elle est commutative :
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;

- le vecteur nul est élément neutre :
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$;

- pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur $\vec{u}'$, unique, tel que
$\vec{u} + \vec{u}' = \vec{u}' + \vec{u} = \vec{0}$;
le vecteur $\vec{u}'$ se nomme opposé du vecteur $\vec{u}$, et est noté $-\vec{u}$.
L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) est le vecteur de représentant (B, A) :
$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Cette addition vérifie les propriétés suivantes :

Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de représentant (A, B) et soit a un réel (figure 7).

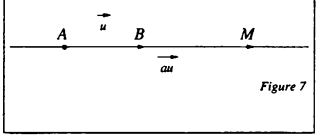

Figure 7

Considérons le point M de la droite (AB) d'abscisse a dans le repère (A, B) :

$$\overline{AM} = a\,\overline{AB}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de $\vec{u}$. Ce vecteur, qui ne dépend que de a et de $\vec{u}$, se nomme produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel a et est noté $a\vec{u}$.

Quand le vecteur $\vec{u}$ est nul, son produit par un réel a est, par définition, le vecteur nul : $a\vec{0} = \vec{0}$.

Considérons maintenant les propriétés :

Quels que soient les réels a, b et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$
$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$$
$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$
$$1\vec{u} = \vec{u}.$$

DIRECTION, SENS ET NORME

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de représentant (A, B). Le point M d'abscisse a dans le repère (A, B) est tel que :

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u}$$
et
$$\overline{AM} = a\overline{AB}.$$

Si a n'est pas nul, le vecteur $a\vec{u}$ n'est pas nul et a même direction que $\vec{u}$. En outre :

- si $a > 0$, $\vec{u}$ et $a\vec{u}$ sont de même sens (figure 8) ;
- si $a < 0$, $\vec{u}$ et $a\vec{u}$ sont de sens contraires (figure 9).

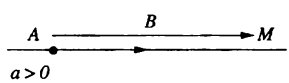

Figure 8

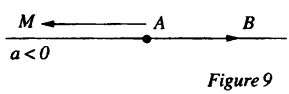

Figure 9

Par ailleurs, les réels égaux $\overline{AM}$ et $a\overline{AB}$ ont même valeur absolue ; d'où $AM = |a| \times AB$, soit : $\| a\vec{u} \| = |a| \times \| \vec{u} \|$.

Quand le vecteur $\vec{u}$ est nul, cette égalité reste vraie.

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ non nul par un réel a est un vecteur :

- de même direction et de même sens que $\vec{u}$, si $a > 0$;
- de même direction et de sens contraire à $\vec{u}$, si $a < 0$.

Par ailleurs, quels que soient a et $\vec{u}$: $\| a\vec{u} \| = |a| \times \| \vec{u} \|$.

Produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'angle (non orienté) θ rad ($\theta \in]0, \pi[$).

Associons à un point A de l'espace les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et le parallélogramme $ABEC$ dont deux côtés consécutifs sont $[A, B]$ et $[A, C]$.

Du fait que $\widehat{BAC} = \theta$ rad, l'aire de ce parallélogramme est mesurée par le réel strictement positif :

$a = AB \times AC \times \sin \theta$.

Sur la droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale au plan (ABC), il existe deux points dont la distance à A est a.

Pour un seul de ces points, P, la base $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est directe : un observateur placé sur la demi-droite d'origine A contenant P, les pieds en A et regardant les points B et C, voit B à sa droite et C à sa gauche.

Le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et non du choix du point A qui sert à construire P : sa *direction*, orthogonale à celle de $\vec{u}$ et à celle de $\vec{v}$, est indépendante de A ; il en est de même de son *sens*, tel que la base $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ soit directe, et de sa *norme* égale au produit $\| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \sin \theta$.

Définition

On nomme produit vectoriel d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ ainsi défini :

- quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{w} = 0$;
- quand $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, considérons trois points A, B, C, tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Sur la droite passant par A et orthogonale au plan (ABC) il existe un point P, et un seul, tel que $AP = AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$ et tel que la base $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit directe. Le vecteur $\vec{w}$ est alors égal à $\overrightarrow{AP}$.

Cette définition, ainsi que l'étude qui l'a précédée, permettent d'établir trois propriétés du produit vectoriel :

- le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à chacun des deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$.

- pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non nuls, d'angle θ rad : $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \sin \theta$.

- étant donnés deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et leur produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, le triplet $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$.

Par définition, le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

Etant donné deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ d'angle θ rad ($\theta \in]0, \pi[$), les réels $\| \vec{u} \|$, $\| \vec{v} \|$ et $\sin \theta$ sont strictement positifs. Egalement pour la norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, égale à $\| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \sin \theta$. Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ n'est donc pas nul.

Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires.

ANTISYMETRIE DU PRODUIT VECTORIEL

Considérons deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ et trois points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les points P et P' définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

et

$$\overrightarrow{AP'} = \vec{v} \wedge \vec{u},$$

appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale au plan (ABC) (figure 10).

En outre, $AP = AP' = AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}$.

Enfin, les bases $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ sont directes.

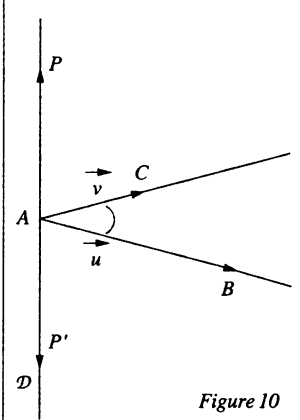

Figure 10

Les points P et P' sont distincts, sinon les deux bases $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ seraient directes, ce qui n'est pas possible puisque la seconde obtenue par échange de deux vecteurs de la première n'a pas la même orientation que la première. Donc, les points P et P' sont symétriques par rapport à A.

Il s'ensuit que :
$\overrightarrow{AP'} = -\overrightarrow{AP}$, soit
$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Cette égalité, vérifiée par deux vecteurs non colinéaires, l'est aussi par deux vecteurs colinéaires, puisque dans ce cas, les deux produits vectoriels sont nuls.

La propriété qui suit s'exprime en disant que le produit vectoriel est *antisymétrique.*

Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs,
$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

APPLICATION AUX BASES ORTHONORMALES DIRECTES

Considérons une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$. Soit O un point de l'espace et I, J, K, les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = k$ (figure 11).

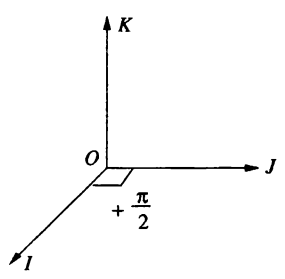

Figure 11

Le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ est ainsi déterminé :

- P appartient à la droite passant par O et orthogonale au plan (OIJ), à savoir à la droite (OK) ;

- $OP = OI \times OJ \times \sin \widehat{IOJ} = 1$;

- la base $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est directe. Il en résulte que $P = K$.

D'où $\vec{i} \wedge \vec{j} = \overrightarrow{OK}$, soit $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et, selon l'antisymétrie du produit vectoriel, $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$.

On démontre également que :

$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ et que $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

Pour toute base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

INDEX
DES NOTATIONS

■

Absolue (Valeur) ····· $|x|$
Action (Loi d') ····· $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$
Addition ····· $x + y$
Addition ····· $\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \sum_{i \in I} x_i$
Adhérent ····· $\overline{P}$
Adjointe (Matrice) ····· M^*
Affine (Espace) ····· $\overrightarrow{MN}$
Aléatoire (Variable) ····· X
Angle ····· $\mathbf{A}\ \mathrm{Ang}\,(D_u, D_v)\ \mathrm{Am}\,(u)$
Angle ····· $\omega \quad \delta \quad \theta_a \quad \mathrm{mes}_a\,\alpha$
Angulaires (Fonctions) ····· $\mathrm{Cos}\,\alpha \quad \mathrm{Sin}\,\alpha \quad \mathrm{Tan}\,\alpha \quad \mathrm{Cot}\,\alpha$
Appartenance ····· $x \in E \quad x \notin E$
Application ····· $f(x) \quad x \mapsto f(x)$
Argument ····· $\mathrm{Arg}\,z \quad \arg z$
Arrangement ····· A_n^p
Associatif ····· $x \perp y \perp z$
Axe ····· $Ox \quad Oy \quad Oz$
Bidual ····· E^{**}
Binôme ····· $C_p^n \quad \binom{n}{p}$
Caractéristique ····· X_P
Cardinal ····· $\mathrm{Card}\,(E)$
Cartésienne (Forme) ····· $\mathrm{Re}\,(z) \quad \mathrm{Im}\,(z)$
Circulaires (Fonctions) ····· $\cos x \quad \sin x \quad \tan x \quad \cot x$
Circulaires (Fonctions) ····· $\mathrm{Arc}\cos x \quad \mathrm{Arc}\sin x \quad \mathrm{Arc}\tan x$
Circulation ····· $\int_\Gamma \omega$
Compactifié ····· $+\infty$
Complété ····· $(\widehat{A}, \widehat{d})$
Complexe (Nombre) ····· $\mathbf{C} \quad \mathrm{i}$
Complexifié ····· $E_{\mathbf{C}}\, f_{\mathbf{C}}\, S_{\mathbf{C}}$
Composé (Polynôme) ····· $P \circ Q$

Conditionnelle (Probabilité) ..... P_b

Conjonction ..... R et S $R \wedge S$

Conjugués (Espaces vectoriels) ..... $\overline{E}$

Conoyau ..... Cocker (f)

Continue (Fraction) ..... $[y_0, y_1, \ldots, y_n]$

Contraire (Evénement) ..... $\overline{A}$

Convergente (Intégrale) ..... $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$

Correspondance ..... $f(P)$

Couple ..... (x, y)

Courbure ..... γR

Covariance ..... Cov (X, Y)

Cycle ..... $[x_1, x_2, \ldots, x_p]$

Cyclotométique (Polynôme) ..... ϕ_n

Darboux-Ribaucour (Trièdre de) ..... $\gamma_n\ \gamma_g\ \tau_g$

Décimal ..... **D**

Degré ..... d° (P) d° (R)

Dérivable ..... $f'(x_0)$ $Df(x_0)$

Dérivation d'une algèbre ..... $D(P)$

Dérivé (Ensemble) ..... $D(P)$

Dérivé (Groupe) ..... $D(G)$

Diamètre ..... $\delta(P)$

Différence ..... $E - F$ $E \setminus F$

Différence ..... $b - a$

Différentielle d'une application ..... df

Différentielle d'un polynôme ..... dP

Différentielle (Forme) ..... $\Omega_p^r(U)$

$\Omega^r(U)$ $\alpha \wedge \beta$

Dirac (Mesure de) ..... δ_α

Discriminant ..... $\Delta(P)$ $\Delta_B(S)$

Disjonction ..... R ou S $R \vee S$

Distance ..... $d(x, y)$ $\delta(P, Q)$

Divergence ..... div $\vec{V}$

Dominée (Application) ..... $f \leq g\ ; f = O(g)$

Dual ..... E^*

Ecart-type····· $\sigma(X)$

Egalité····· $= \neq$

Equivalentes (Relations)····· $P \Leftrightarrow Q$

Euler (Constante d')····· γ

Exponentielle····· $\exp_a x \quad a^x \quad e$

$e^x \quad e^z \quad \mathbf{e}_a \quad \pi$

Extérieur····· $\text{ext}(P)$

Factorielle····· $n!$

Famille····· $(x_i)_{i \in I} \quad (E_i)_{i \in I}$

Flux····· $\int\!\!\int_{\Sigma} \omega$

Foncteur····· $F(A) \quad F(f)$

Formelle (Série)····· $X \quad K[[X]] \quad K((X))$

Fraction····· $\frac{x}{y} \quad x/y$

Fractionnaire (Partie)····· $F(x)$

Gradient····· $\text{grad}\, f$

Gram (Déterminant de)····· $\text{Gram}_S \quad \text{Gram}$

Hyperboliques (Fonctions)····· $\text{ch}\, x \quad \text{sh}\, x$

$\text{th}\, x \quad \coth x$

Hyperboliques (Fonctions)····· $\text{Arg ch}\, x$

$\text{Arg sh}\, x \quad \text{Arg th}\, x$

Identique (Application)····· I_E

Image····· $\text{Im}(f)$

Implication····· $P \Rightarrow Q$

Inclusion····· $E \subset F$

Indice d'un sous-groupe····· $(G : G')$

Infini (Produit)····· $\prod_{n=0}^{+\infty} x_n$

Intégrale····· $\int_{[a\,b]} f \quad \int_a^b f \quad \int_a^b f(x)\,dx$

Intersection····· $E \cap F$

Intervalle····· $[a, b] \quad]a, b[\quad [a, b[\quad]a, b[$

Intervalle····· $]\leftarrow, b] \quad]\leftarrow, b[\quad [a, \rightarrow[$

Intervalle ..... $]-\infty, b]$ $]-\infty, b[$ $[a, +\infty[$ $]a, +\infty[$

Intervalle ..... $]-\infty, +\infty[$

Inversible ..... x^{-1} $\frac{1}{x}$ $1/x$

Kronecker (Symbole de) ..... δ_{ij}

Laplace-Gauss (Loi de) ..... $\mathcal{N}(m, \sigma)$

Laplacien ..... Δ

Lie (Algèbre de) ..... $[x, y]$

Limite ..... $\lim_{n \to +\infty} u_n$ $\overset{?}{\lim}_{x \to a} f(x)$

Linéaire (Forme) ..... $\vec{e}_j^*$

Linéaire (Groupe) ..... $\mathbf{GL}(E)$

Logarithme ..... $\log_a$ log In

Loi d'une variable aléatoire ..... P_X

Matrice ..... (α_{ij}) $\mathbf{M}_{n,p}(K)$ $\mathbf{M}_n(K)$

Matrice ..... $M \otimes M'$

Métrique (Espace) ..... (A, d)

Möbius (Fonction de) ..... μ

Module ..... $|z|$

Module ..... $\mathbf{U}$

Moment ..... $m_r(X)$ $E(X)$

Monge (Notation de) ..... $p\ q\ r\ s\ t$

Multiple d'un élément ..... na

Multipliable ..... $\prod_{i \in I} x_i$

Multiplication ..... xy $\prod_{i=1}^{n} x_i$ $\prod_{i \in I} x_i$

Négation ..... non R

Normale à une courbe ..... $\vec{n}$ $\vec{b}$

Norme ..... $\|\vec{x}\|$ $|||f|||$

Noyau ..... Ker (f)

Numérique (Droite) ..... $\overline{\mathbf{R}}$ $[-\infty, +\infty]$

Opposé ..... $-x$

Opposé (Ordre) ..... $x \geq y$

Ordre (Relation d') ..... $x < y$ $x \leq y$

Orthogonale (Matrice) ..... $\mathbf{O}(Q)$

Parallèle ..... $A' /\!/ A''$

Paire ..... $\{x, y\}$

Poisson (Loi de) ..... $p(k, m)$ $\mathcal{P}(m)$

Polynôme ..... X $P(K)$ $K[X]$

Positive (Partie) ..... x^+ x^-

Produit ..... $E \times F$ E^2

Puissance ..... a^n x^α

Puissance d'un point ..... $C(M)$

Quadruplet ..... (x, y, z, t)

Quantificateur ..... $\exists$ $\forall$

Quaternion ..... $E_{p,q}$ $\mathbf{H}$ $\mathbf{K}$

Quotient (Ensemble) ..... E / R

Racine ..... $\sqrt[y]{}$ $\sqrt{y}$

Rang ..... rang (P) rang (f) rang (M)

Rationnel (Entier) ..... $\mathbf{Z}$

Rationnel (Nombre) ..... $\mathbf{Q}$

Rationnelle (Fraction) ..... $K(X)$ $K(X_1, X_2, ..., X_p)$

Réel (Nombre) ..... $\mathbf{R}$

Restriction ..... f_P $f|P$

Réunion ..... $E \cup F$

Réunion ..... $\bigcup_{i \in I} P_i$ $\bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ $\bigcup_{n=1}^{p} P_n$

Rotationnel ..... rot $\vec{V}$

Scalaire (Produit) ..... $(\vec{x} \mid \vec{y})$ $\vec{x} \cdot \vec{y}$

Segment ..... $[\vec{a}, \vec{b}]$ $[M, N]$

Semblables (Fonctions) ..... f g

Série ..... $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$

Signature ..... ε

Singleton ..... $\{ x \}$

Sommable (Famille) ..... $\sum_{i \in I} x_i$

Somme d'une famille d'ensembles ..... $\prod_{i \in I} E_i$

Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels ..... $\sum_{i \in I} E_i$

Strict ..... $x < y$

Suite ..... $(x_n)_{n \in P}$ (x_n) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Support ..... $\mathrm{supp}(f)$

Symétrique (Algèbre) ..... $S(E)$ $S(f)$

Symétrique (Différence) ..... $E \Delta F$

Symétrique (Puissance) ..... $S^p(E)$ $S^p(f)$

Tangent (Espace) ..... $T_{m_0}(V)$

Tenseur ..... $T^{p \cdot q}(E)$

Tensoriel (Produit) ..... $E_1 \otimes E_2$ $x_1 \otimes x_2$

Tensorielle (Algèbre) ..... $T(E)$ $T(f)$

Tore ..... $\mathbf{T}$

Torsion ..... τ T

Trace ..... $\mathrm{Tr}(M)$ $\mathrm{tr}(M)$ $\mathrm{Tr}(f)$ $\mathrm{tr}(f)$

Triplet ..... (x, y, z)

Unitaire (Matrice) ..... $\mathbf{U}(n, \mathbf{C})$

Unité (Matrice) ..... I_n, 1_n

Valuation ..... $v_0(P)$ $v_\alpha(R)$

Vandermonde (Polynôme de) V

Variance ..... $V(X)$ $\mathrm{Var}(X)$

Variation ..... $V_f(I)$

Vectoriel (Produit) ..... $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \ldots \times \vec{x}_{n-1}$ $\vec{x} \times \vec{y}$

Vide (Ensemble) ..... $\varnothing$

Zêta (Fonction) de Riemann ..... ζ

TABLES DES MATIÈRES

■

ESPACE ..... p. 5

FONCTIONS ..... p. 17

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS ..... p. 23

SUITES. LANGAGE DES LIMITES ..... p. 39

PROPRIÉTÉS DES LIMITES ..... p. 49

DÉRIVÉES ..... p. 53

PRIMITIVES. INTÉGRALES ..... p. 59

LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES ..... p. 69

NOMBRES COMPLEXES ..... p. 81

NOMBRES RÉELS ..... p. 95

PROBABILITÉS ..... p. 101

STATISTIQUE ..... p. 117

SYSTÈMES LINÉAIRES ..... p. 123

VECTEURS ..... p. 133

INDEX DES NOTATIONS ..... p. 147

Dans la même série :

Formules de physique

Marabout N° 8028

Dans la même série :

Formules de chimie

Marabout N° 8029

IMPRESSION : BUSSIÈRE S.A., SAINT-AMAND (CHER). — N° 502
D. L. FÉVRIER 1994/0099/60
ISBN 2-501-02075-8
Imprimé en France

PARASCOLAIRE
CULTURE GÉNÉRALE

Formules de maths

Enfin rassemblées et faciles à retrouver !

Toutes les formules **classées** selon les grandes catégories traditionnelles:

- l'espace
- les fonctions
- les formes
- les nombres
- le plan
- les probabilités
- les systèmes linéaires
- les vecteurs...

et **expliquées** dans un ordre logique pour mieux comprendre et apprendre.

Le bagage scientifique minimal indispensable !

40 **1258** 9
9 782501 020756

marabout
M 6

Couverture: Jean Verscheure